# Разнобой по алгебре

*9 класс*

*2.11.15*

1. Известно, что квадратные уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $bx^2 + cx + a = 0$ ($a, b$ и $c$ – отличные от нуля числа) имеют общий корень. Найдите его.

2. Найдите все такие числа $a$, что для любого натурального $n$ число $an(n+2)(n+4)$ будет целым.

3. Докажите, что суммарное количество цифр чисел $4^n$ и $25^n$ нечетное.

4. Докажите, что для любого $x > 0$ и натурального $n$ выполнено неравенство
$$1 + x^{n+1} \geq \frac{(2x)^n}{(1+x)^{n-1}}$$

5. Дано натуральное число $n > 1$ . Для каждого делителя $d$ числа $n+1$ , Петя разделил число $n$ на $d$ с остатком и записал на доску неполное частное, а в тетрадь – остаток. (Например, при делении числа 17 на 6, $17 = 6 \cdot 2 + 5$ , то есть неполное частное равно 2, а остаток – 5.) Докажите, что наборы чисел на доске и в тетради совпадают.

6. Рассмотрим все возможные наборы чисел из множества $\{1, 2, 3, ..., n\}$, не содержащие двух соседних чисел. Докажите, что сумма квадратов произведений чисел в этих наборах равна $(n+1)! - 1$.

7. Докажите, что ни при каком целом $k$ число $k^2 + k + 1$ не делится на 101

8. Натуральные числа $p$ и $q$ взаимно просты. Отрезок $[0; 1]$ разбит на $p+q$ одинаковых отрезков. Докажите, что в каждом из этих отрезков, кроме двух крайних лежит ровно одно из $p+q-2$ чисел
$$\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \ldots, \frac{p-1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots, \frac{q-1}{q}.$$

9. Найти все такие натуральные $n$, что $n | 3^n - 2^n$.