Снова геометрия

9 класс

12.10.15

1. Биллиард имеет форму выпуклого четырехугольника $ABCD$. Из точки K стороны AB выпустили биллиардный шар, который отразился в точках L, M, N от сторон BC, CD, DA, возвратился в точку K и вновь вышел на траекторию $KLMN$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ можно вписать в окружность.

2. Равносторонние треугольники ABC и PQR расположены так, что вершина C лежит на стороне PQ, а вершина R – на стороне AB(точки A и P находятся в одной полуплоскости относительно CR). Докажите, что $AP \parallel BQ$.

3. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке N. Описанные окружности треугольников ANB и CND повторно пересекают стороны BC и AD в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Докажите, что четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ вписан в окружность с центром N.

4. Четыре прямые образуют четыре треугольника. Докажите, что описанные окружности этих треугольников имеют общую точку (**точка Микеля**).

5. В треугольнике ABC $AB > BC$, и на стороне AB взята точка P так, что $BP = BC$. Биссектриса BM пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке N. Докажите, что точки A, P, M, N лежат на одной окружности.

6. а) Докажите, что точка N, симметричная ортоцентру H треугольника ABC относительно середины стороны AC, лежит на описанной окружности треугольника ABC.
   б) Пусть точка M симметрична H относительно стороны AC. Докажите, что треугольник MNB прямоугольный.
   в) Докажите, что A, C, H и проекция H на медиану треугольника, выходящую из вершины B, лежат на одной окружности.

7. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O. Точки E и F – середины не содержащих других вершин дуг AB и CD соответственно. Прямые, проходящие через точки E и F параллельно диагоналям четырёхугольника $ABCD$, пересекаются в точках K и L. Докажите, что прямая KL содержит точку O.