Метод Штурма

группа 9-2

14.09.2015

1. Что происходит с выражениями $a+b$, $a \cdot b$, a^2+b^2, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, при сближении двух положительных чисел a и b а) при фиксированной сумме $a+b$; б) при фиксированном произведении $a \cdot b$?

2. Докажите методом Штурма неравенства между средними (слева направо: среднее гармоническое, геометрическое, арифметическое, квадратическое)

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \leqslant \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}.$$

3. Пусть s — среднее арифметическое набора положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Докажите неравенство: $(1+x_1)\cdot(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_n) \leqslant (1+s)^n$.

4. Пусть s — среднее геометрическое набора положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Докажите неравенство: $(1+x_1)\cdot(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_n) \geqslant (1+s)^n$.

5. Пусть положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таковы, что $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$.
Докажите, что тогда
$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)}{x_1x_2\cdots x_n} \geqslant (n-1)^n$$

6. Пусть неотрицательные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таковы, что $x_1+x_2+\ldots+x_n=\frac{1}{2}$.
Докажите, что тогда
$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)}{(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)} \geqslant \frac{1}{3}.$$

7. Докажите, что среди всех треугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет правильный.

8. Дан набор неотрицательных чисел, удовлетворяющий $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$. Докажите, что
$$(1+x_1)(2+x_2)\ldots(n+x_n) \leqslant 2\cdot n!$$

9. Докажите, что $0 \leqslant xy+yz+zx-2xyz \leqslant \dfrac{7}{27}$, при $x, y, z \geqslant 0$ и $x+y+z=1$.