Теория чисел.

9 класс

07.09.15

Новое - это хорошо забытое старое.

Жак Пеше

Вспоминаем классические теоремы.

1. а) Пусть a взаимно просто с m. Докажите, что числа $a, 2a, 3a, \ldots, (m-1)a$ дают все ненулевые остатки по модулю m.
   б) Докажите, что если $ac \equiv bc\ (mod\ m)$ и c и m взаимно просты, то $a \equiv b\ (mod\ m)$.

2. а) p — простое число. Пусть a не кратно p. Докажите, что $(p-1)! \equiv a^{p-1}(p-1)!\ (mod\ p)$.
   б) (Малая теорема Ферма) Докажите, что $a^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$.

3. Пусть n — натуральное число. Количество натуральных чисел, взаимно простых с n и не превосходящих его, обозначается $\phi(n)$.
   (Теорема Эйлера) Докажите, что для $(a, m) = 1$ верно $a^{\phi(m)} \equiv 1\ (mod\ m)$. (Рассмотреть числа взаимно простые с m: $x_1, x_2, \ldots, x_{\phi(m)}$, а также числа $ax_1, ax_2, \ldots, ax_{\phi(m)}$)

4. а) Докажите, что числа $2, 3, 4, \ldots, (p-3), (p-2)$ можно разбить на пары так, что произведение чисел в каждой паре будет сравнимо с единицей по модулю p. Остатки, произведение которых сравнимо с единицей, называются взаимно обратными.
   б) (Теорема Вильсона) Докажите, что $(p-1)!+1$ делится на p тогда и только тогда, когда p — простое число.

Разные задачи. Во всех задачах p — простое число.

1. Пусть p и q – различные простые числа. Докажите, что $p^q + q^p \equiv p + q\ (mod\ pq)$.

2. Докажите, что $\underbrace{11\ldots1}_{p}\underbrace{22\ldots2}_{p}\ldots\underbrace{99\ldots9}_{p} - 12\ldots9$ делится на p.

3. Пусть $p \neq 2, 5$. Докажите, что $p-1$ делится на длину периода десятичного разложение дроби $\frac{1}{p}$? Может ли этот период быть равен $p-1$?

4. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_p$ - конечная арифмитическая прогрессия с разностью, не кратной р. Докажите, что в ней можно найти элемент a_k, что число $a_k + a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_p$ делится на p^2.

5. Пусть a — нечетное число. Докажите, что числа $a^{2^n} + 2^{2^n}$ и $a^{2^m} + 2^{2^m}$ взаимно просты при любых натуральных $n \neq m$.

6. Найдите наименьшее натуральное число $a \geq 2$ такое, что существует простое число p, что число $\frac{a^p - a}{p}$ является полным квадратом, и a не делится на p.