Функциональные уравнения, часть 2

группа 9-1

19.05.2016

В задачах этого листика требуется найти все функции с указанными областью определения и множеством значений, при всех значениях аргументов удовлетворяющие данному соотношению.

`На функциональное уравнение можно смотреть как на систему бесконечного числа уравнений на бесконечное число неизвестных.`

1. $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$ $2f(x)+f(1-x)=x^2$.
2. $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\forall\, x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ $f(x)+f(\frac{x-1}{x})=2x$.
3. Пусть $P(x,y)$ — многочлен, такой что $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$ $P(x,y)=P(x+1,y+1)$. Докажите, что $P(x,y)=\sum\limits_{s=0}^{k} a_s(x-y)^s$ для некоторых $a_0,a_1,\ldots,a_k\in\mathbb{R}$.
4. $f\colon [0,+\infty)\to[0,+\infty)$, $\forall\, x\in[0,+\infty)$ $f(f(x))+f(x)=2x$.
5. $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$ $f(x^2+f(y))=f^2(x)+y$.

   `Полезное наблюдение: пусть` $f\colon A\to B$, $g\colon B\to C$. `Тогда из инъективности` $g\circ f$ `следует инъективность` f; `сюръективность` $g\circ f$ `влечёт сюръективность` g.

Функциональные уравнения, часть 2

группа 9-1

19.05.2016

В задачах этого листика требуется найти все функции с указанными областью определения и множеством значений, при всех значениях аргументов удовлетворяющие данному соотношению.

`На функциональное уравнение можно смотреть как на систему бесконечного числа уравнений на бесконечное число неизвестных.`

1. $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$ $2f(x)+f(1-x)=x^2$.
2. $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\forall\, x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ $f(x)+f(\frac{x-1}{x})=2x$.
3. Пусть $P(x,y)$ — многочлен, такой что $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$ $P(x,y)=P(x+1,y+1)$. Докажите, что $P(x,y)=\sum\limits_{s=0}^{k} a_s(x-y)^s$ для некоторых $a_0,a_1,\ldots,a_k\in\mathbb{R}$.
4. $f\colon [0,+\infty)\to[0,+\infty)$, $\forall\, x\in[0,+\infty)$ $f(f(x))+f(x)=2x$.
5. $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$ $f(x^2+f(y))=f^2(x)+y$.

   `Полезное наблюдение: пусть` $f\colon A\to B$, $g\colon B\to C$. `Тогда из инъективности` $g\circ f$ `следует инъективность` f; `сюръективность` $g\circ f$ `влечёт сюръективность` g.