

Тренировочная олимпиада

9 класс
15.04.2016

1. На экваторе растут деревья одинаковой высоты. Если все они упадут на запад, то суммарная длина участков экватора, покрытых не менее чем в пять слоёв, составит ровно 100 км. Докажите, что если все деревья упадут на восток, то суммарная длина участков экватора, покрытых не менее чем в пять слоёв, составит ровно 100 км.
 2. На сторонах BC , CA , AB треугольника ABC отмечены точки A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в точке X . Оказалось, что AA_1 — биссектриса угла BAC и что $\angle XCB = \angle BAC + \angle CBA$. Докажите, что $\angle A_1C_1B_1$ — прямой.
 3. У Питирима есть неограниченный запас шариков синего и чёрного цветов, у Васи — чёрного и голубого. За один ход игрок может положить в коробочку любой из доступных ему шариков. Изначально коробочка пустая, игроки ходят по очереди, начинает Питирим. Длительность игры — 1000 ходов (т.е. каждый игрок сделает 500 ходов). В конце игры Питирим считает модуль разности между количествами синих и чёрных шариков в коробочке, Вася — между количествами чёрных и голубых. У кого получилось число меньше, тот и выиграл; в случае равенства — ничья. Чем закончится это противостояние при безошибочной игре соперников?
 4. Дано простое число p . Члены бесконечной последовательности a_1, a_2, a_3, \dots натуральных чисел при всех $n \geq 1$ удовлетворяют соотношению: $a_{n+1} = a_n + p \cdot [\sqrt[p]{a_n}]$. Докажите, что эта последовательность содержит точную p -тую степень натурального числа.
-

Тренировочная олимпиада

9 класс
15.04.2016

1. На экваторе растут деревья одинаковой высоты. Если все они упадут на запад, то суммарная длина участков экватора, покрытых не менее чем в пять слоёв, составит ровно 100 км. Докажите, что если все деревья упадут на восток, то суммарная длина участков экватора, покрытых не менее чем в пять слоёв, составит ровно 100 км.
2. На сторонах BC , CA , AB треугольника ABC отмечены точки A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в точке X . Оказалось, что AA_1 — биссектриса угла BAC и что $\angle XCB = \angle BAC + \angle CBA$. Докажите, что $\angle A_1C_1B_1$ — прямой.
3. У Питирима есть неограниченный запас шариков синего и чёрного цветов, у Васи — чёрного и голубого. За один ход игрок может положить в коробочку любой из доступных ему шариков. Изначально коробочка пустая, игроки ходят по очереди, начинает Питирим. Длительность игры — 1000 ходов (т.е. каждый игрок сделает 500 ходов). В конце игры Питирим считает модуль разности между количествами синих и чёрных шариков в коробочке, Вася — между количествами чёрных и голубых. У кого получилось число меньше, тот и выиграл; в случае равенства — ничья. Чем закончится это противостояние при безошибочной игре соперников?
4. Дано простое число p . Члены бесконечной последовательности a_1, a_2, a_3, \dots натуральных чисел при всех $n \geq 1$ удовлетворяют соотношению: $a_{n+1} = a_n + p \cdot [\sqrt[p]{a_n}]$. Докажите, что эта последовательность содержит точную p -тую степень натурального числа.