Многочлены

группа 9-1

11.04.2016

1. В выражении $(x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2)^{2006}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Докажите, что при некоторой степени переменной x получился отрицательный коэффициент.

2. $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что для некоторых целых a и b выполняется равенство: $P(a) - P(b) = 1$. Докажите, что a и b различаются на 1.

3. Даны два многочлена от переменной x с целыми коэффициентами. Произведение их есть многочлен от переменной x с чётными коэффициентами, не все из которых делятся на 4. Доказать, что в одном из многочленов все коэффициенты чётные, а в другом — хотя бы один нечётный.

4. Даны приведённые многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ степени 10. Известно, что уравнение $P(x) = Q(x)$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $P(x+1) = Q(x-1)$ имеет хотя бы один действительный корень.

5. На доске написано: $x^3 + \ldots x^2 + \ldots x + \ldots = 0$. Два школьника по очереди вписывают вместо многоточий вещественные числа. Цель первого — получить уравнение, имеющее ровно один вещественный корень. Сможет ли второй ему помешать?

6. Пусть $P(x)$ — многочлен нечётной степени. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = 0$ имеет не меньше различных вещественных корней, чем уравнение $P(x) = 0$.

7. Числа a, b, c таковы, что уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ имеет три действительных корня. Докажите, что если $-2 \leqslant a + b + c \leqslant 0$, то хотя бы один из корней принадлежит отрезку $[0, 2]$.

8. Пусть $f(x)$ и $h(x)$ — приведенные квадратные трехчлены, графики которых имеют общую точку, а $g(x)$ — многочлен, отличный от константы. Оказалось, что $f(g(h(x))) = h(g(f(x)))$ для всех вещественных x. Докажите, что $f(x) = h(x)$.