Комплексные координаты

группа 9-1
17.03.2016

Соглашение: в этом листике точки обозначаются заглавными буквами, а их комплексные координаты — соответствующими строчными, т. е. точка Z имеет координату z.

Вспомогательные факты для решения геометрических задач:

1. Докажите, что $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$. `Как вы думаете, зачем я сюда засунул эту задачу?`

2. Докажите, что расстояние между точками M и N выражается так: $|MN|^2 = (m-n)\cdot(\overline{m}-\overline{n})$.

3. а) Докажите, что различные точки A, B, C лежат на одной прямой, если и только если $\frac{a-b}{a-c} \in \mathbb{R}$.
   б) Напишите уравнение прямой, проходящей через A и B.

4. Докажите, что скалярное произведение векторов u, v задаётся формулой $<\vec{u},\vec{v}> = \frac{1}{2}(u\overline{v}+\overline{u}v)$.

5. (*Уравнение хорды*) Докажите, что прямая, соединяющая различные точки A и B, лежащие на окружности $z\overline{z}=1$, задаётся уравнением $z + ab\overline{z} = a + b$. `Это самая используемая формула!`

6. а) Докажите, что $z + a^2\overline{z} = 2a$ служит уравнением касательной к точке A окружности $z\overline{z} = 1$.
   б) Докажите, что касательные к точкам A и B окружности $z\overline{z} = 1$ пересекаются в точке $\frac{2ab}{a+b}$.

7. Докажите, что хорды AB и CD окружности $z\overline{z} = 1$ перпендикулярны $\Leftrightarrow ab + cd = 0$.

8. Выразите через комплексные координаты точек A, B, C на окружности $z\overline{z} = 1$ координаты точки пересечения медиан, ортоцентра, середин сторон и оснований высот треугольника ABC.

9. Докажите, что различные точки A, B, C, D лежат на одной окружности или прямой, если и только если $\frac{a-c}{a-d}\cdot\frac{b-d}{b-c} \in \mathbb{R}$. Это выражение называется *двойным отношением* чисел a, b, c, d.

Комплексная система координат удобна в задачах, сконструированных вокруг одной окружности. Если эту окружность параметризовать $z\overline{z} = 1$, то все уравнения приобретают особенно простой вид.

Геометрические задачи:

1. (*Теорема Ньютона*) Докажите, что центр вписанной в четырёхугольник окружности лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей этого четырёхугольника.

2. Докажите *теорему Симсона*: если точки A, B, C, P лежат на одной окружности, то проекции точки P на стороны треугольника ABC лежат на одной прямой.

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы при вершинах A, B, C равны. Докажите, что прямая Эйлера треугольника ABC проходит через D.

4. Из основания A_1 биссектрисы AA_1 неравнобедренного треугольника ABC провели вторую касательную ко вписанной окружности, точку касания обозначили K_A. Аналогично строятся точки K_B, K_C. Докажите, что прямые, соединяющие K_A, K_B, K_C с серединами соответствующих сторон треугольника, пересекаются в точке, лежащей на вписанной в треугольник окружности.

5. (*Теорема Паскаля*) Докажите, что точки пересечения противоположных сторон вписанного в окружность шестиугольника (если они существуют) лежат на одной прямой.