

Счёт отрезков и тригонометрия

группа 9-1

14.03.2016

1. На биссектрисе угла с вершиной A отмечена точка P . Через P проводится случайная прямая, пересекающая стороны угла в точках B и C . Докажите, что величина $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$ не зависит от выбора прямой.
2. Биссектриса угла A остроугольного треугольника ABC вторично пересекает его описанную окружность в точке A_0 . Пусть B_1 и C_1 — середины AC и AB соответственно. Серединные перпендикуляры к AC и AB пересекают прямую AA_0 в точках B_2, C_2 . Докажите, что площади треугольников $A_0B_1B_2$ и $A_0C_1C_2$ равны.
3. В угол MAN ($MA = NA$) вписана окружность ω с центром O , так что M, O, N лежат на одной прямой. На отрезках AM, AN отмечены случайные точки B, C соответственно с условием, что BC касается ω . Докажите, что величина $MB \cdot NC$ не зависит от выбора точек B, C .
4. Вписанная в треугольник ABC окружность ω с центром I касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Отрезок AI пересекает ω в точке X . Пусть P и Q — точки пересечения пар прямых C_1A_1 и BX, B_1A_1 и CX соответственно. Докажите, что $PQ \perp AI$.
5. В остроугольном треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 и высота AH_A . Точка A^* диаметрально противоположна точке касания вписанной в треугольник окружности со стороной BC . Докажите, что прямые B_1C_1, AA_1 и A^*H_A пересекаются в одной точке.
6. Дан треугольник ABC . Внеписанная окружность касается стороны AB в точке C_C и продолжения стороны BC в точке A_C . Другая внеписанная окружность касается стороны AC в точке B_B и продолжения стороны BC в точке A_B . Докажите, что прямые $A_C C_C$ и $A_B B_B$ пересекаются на высоте треугольника.
7. Вписанная в остроугольный треугольник ABC окружность касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Пусть AH_A, BH_B, CH_C — его высоты, а I_A, I_B, I_C — центры окружностей, вписанных в треугольники $AH_B H_C, BH_C H_A$ и $CH_A H_B$ соответственно. Докажите, что шестиугольник $I_A B_1 I_C A_1 I_B C_1$ — равносторонний.