

# Комплексный взгляд на геометрические преобразования

группа 9-1

10.03.2016

1. На плоскости задана система комплексных координат. Какими формулами вида  $z' = f(z)$  задаются геометрические преобразования из списка ниже? а) параллельный перенос; б) поворот; в) гомотетия; г) поворотная гомотетия (т. е. композиция поворота и гомотетии с центром в одной и той же точке)? Если у преобразования есть центр, то он не обязательно в точке  $z = 0$ . Геометрические параметры преобразования (вектор переноса, угол поворота, коэффициент гомотетии, положение центра) предполагаются известными.
2. Докажите, что формула  $z' = kz + b$  ( $k \neq 0$ ) задаёт поворотную гомотетию либо параллельный перенос. Сформулируйте необходимые и достаточные условия на коэффициенты  $a$  и  $b$  того, что заданное преобразование является а) параллельным переносом; б) поворотом; в) гомотетией.
3. (*Некоторые геометрические группы*) Используя предыдущую задачу, покажите, что группами относительно операции композиции являются следующие множества преобразований: а) все параллельные переносы; б) все параллельные переносы и повороты; (= *движения плоскости, сохраняющие ориентацию*) в) все параллельные переносы и гомотетии; г) все параллельные переносы и поворотные гомотетии (= *преобразования подобия, сохраняющие ориентацию*).

Для доказательства того, что множество преобразований является группой, достаточно лишь проверить замкнутость относительно композиции и обратимость, так как ассоциативность ( $(ab)c = a(bc)$ ) относительно композиции выполнена всегда.

Те, кто решил три первые задачи, имели шансы осознать, что с помощью комплексных чисел особенно легко записываются поворотные гомотетии. Мораль: при решении геометрических задач в комплексных координатах полезно всегда, когда это возможно, писать условия на объекты в терминах поворотов и поворотных гомотетий.

4. На сторонах треугольника  $ABC$  вовне построены квадраты  $ABXP$  и  $ACYQ$ . Докажите, что медиана  $AM$  исходного треугольника перпендикулярна  $PQ$  и равна по длине половине  $PQ$ .
5. На сторонах выпуклого четырёхугольника вовне построили квадраты. Докажите, что отрезки, соединяющие центры квадратов, построенных на противоположных сторонах, равны по длине и перпендикулярны.
6. (*Условие перпендикулярности хорд*) На окружности  $|z| = 1$  отмечены различные точки  $A, B, C, D$  с координатами  $a, b, c, d$  соответственно. Докажите, что  $AB \perp CD \Leftrightarrow ab + cd = 0$ .

Задачах с правильными треугольниками полезно введение переменной  $\varepsilon$  — нетривиальный корень  $\varepsilon^3 = 1$  (или  $\varepsilon^6 = 1$ , зависит от решения). Эта переменная кодирует поворот на  $120^\circ$  ( $60^\circ$ ). При работе с ней полезно пользоваться соотношением  $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$  ( $\varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0$ ), которое следует из разложения на множители  $\varepsilon^3 - 1 = 0$  ( $\varepsilon^6 - 1 = 0$ ), и практически бесполезна явная формула:  $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  ( $\varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ).

7. На сторонах треугольника  $ABC$  вовне построены равносторонние треугольники. Докажите, что их центры являются вершинами равностороннего треугольника.