Комплексные числа, часть 2

группа 9-1
03.03.2016

1. Нарисуйте все корни уравнения $z^n = 1$. Найдите их сумму, сумму кубов, произведение.

2. Вычислите суммы ($z = cos\varphi + i\sin\varphi$):

   а) $1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos n\varphi$.

   б) $\sin\varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \ldots + \sin n\varphi$.

3. Вычислите суммы:

   а) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \ldots + C_n^{2k} + \ldots$

   б) $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots + C_n^{4k} - C_n^{4k+2} + \ldots$

   в) $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \ldots + C_n^{4k} + \ldots$

   $*$) $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \ldots + C_n^{3k} + \ldots$

   Теорема (Основная теорема алгебры)**.** *Любой многочлен с комплексными коэффициентами, отличный от константы, имеет комплексный корень.*

4. (*Следствия из основной теоремы алгебры*)

   а) Пусть $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, где все $a_i \in \mathbb{C}$. Докажите, что $P(z)$ можно представить в виде $P(z) = a_n(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \ldots (z - z_s)^{k_s}$, где все корни z_i различны.

   б) (*Напоминание*) Докажите, что если $z \in \mathbb{C}$ является корнем многочлена с вещественными коэффициентами, то $\overline{z}$ также является корнем этого многочлена.

   в) Докажите, что любой многочлен с вещественными коэффициентам раскладывается на множители (также многочлены с вещественными коэффициентами) степени не более 2.

   г) Дан многочлен $S(x)$ с вещественными коэффициентами. Докажите, что $S(x) \geqslant 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда существуют такие многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с вещественными коэффициентами, что $(P(x))^2 + (Q(x))^2 = S(x)$.

5. Докажите, что $x^{66} + x^{55} + x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1$ делится на $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

6. Найдите все многочлены $P(x)$ с вещественными коэффициентами, при всех вещественных x удовлетворяющие соотношению: $P(x^2 + x + 1) = P(x)P(x + 1)$.

7. Вычислите произведения (*рассмотрев подходящий многочлен*):

   а) $\cos\frac{\pi}{2n} \cdot \cos\frac{2\pi}{2n} \cdot \cos\frac{3\pi}{2n} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{(n-1)\pi}{2n}$.

   б) $\sin\frac{\pi}{2n} \cdot \sin\frac{2\pi}{2n} \cdot \sin\frac{3\pi}{2n} \cdot \ldots \cdot \sin\frac{(n-1)\pi}{2n}$.

8. Конечное множество комплексных чисел $\mathcal{A}$ таково, что если $z \in \mathcal{A}$, то и $z^n \in \mathcal{A}$ при любом натуральном n. Найдите все возможные значения суммы всех элементов в таком множестве $\mathcal{A}$.