Алгебра

группа 9-1

22.02.2016

1. Найдите все натуральные n, при которых $3^n + 5^n$ делится на $3^{n-1} + 5^{n-1}$.

2. Пусть S — множеств значений многочлена $x^2 + 1$ в целых точках. Существует ли непостоянная бесконечная геометрическая прогрессия, содержащаяся внутри S?

3. Пусть $f(x) = |4 - 4|x|| - 2$. Сколько вещественных решений имеет уравнение $f(f(x)) = x$?

4. Найдите наибольшее натуральное n такое, что для любого натурального $k \leqslant n/2$ найдутся два натуральных делителя n с разностью k.

5. Сколько вещественных решений в интервале $(0, 2016)$ имеет уравнение $x + [x^2] = [x] + x^2$?

6. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — две дробно-линейные функции. Известно, что $f(x) + g(x) \geqslant 2016$ для всех x, при которых обе функции определены. Докажите, что $f(x) + g(x)$ постоянна при всех допустимых x. *Дробно-линейная функция* — отношение двух многочленов степени 1.

7. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, причём коэффициент при старшей степени равен 1. Известно, что для любого натурального n уравнение $P(x) = 2^n$ имеет целый корень. Докажите, что $P(x)$ имеет степень 1.

Алгебра

группа 9-1

22.02.2016

1. Найдите все натуральные n, при которых $3^n + 5^n$ делится на $3^{n-1} + 5^{n-1}$.

2. Пусть S — множеств значений многочлена $x^2 + 1$ в целых точках. Существует ли непостоянная бесконечная геометрическая прогрессия, содержащаяся внутри S?

3. Пусть $f(x) = |4 - 4|x|| - 2$. Сколько вещественных решений имеет уравнение $f(f(x)) = x$?

4. Найдите наибольшее натуральное n такое, что для любого натурального $k \leqslant n/2$ найдутся два натуральных делителя n с разностью k.

5. Сколько вещественных решений в интервале $(0, 2016)$ имеет уравнение $x + [x^2] = [x] + x^2$?

6. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — две дробно-линейные функции. Известно, что $f(x) + g(x) \geqslant 2016$ для всех x, при которых обе функции определены. Докажите, что $f(x) + g(x)$ постоянна при всех допустимых x. *Дробно-линейная функция* — отношение двух многочленов степени 1.

7. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, причём коэффициент при старшей степени равен 1. Известно, что для любого натурального n уравнение $P(x) = 2^n$ имеет целый корень. Докажите, что $P(x)$ имеет степень 1.