Теорема синусов

группа 9-1
15.02.2016

1. Пусть H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Докажите, что $AH = BC \cdot \operatorname{ctg} \angle A$.

2. Про выпуклый пятиугольник $ABCDE$ известно, что сумма любых двух его соседних углов больше 180°. Пары продолжений его несоседних сторон пересекаются в точках A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 (A_1 — пересечение BC и DE, дальше разберётесь). Получилась «звёздочка». Докажите, что
$$AD_1 \cdot BE_1 \cdot CA_1 \cdot DB_1 \cdot EC_1 = AC_1 \cdot BD_1 \cdot CE_1 \cdot DA_1 \cdot EB_1.$$

3. В треугольнике с тупым углом A проведены высоты BB_1, CC_1. Докажите, что отрезок, соединяющий проекции точки B_1 на прямые BA и BC, равен отрезку, соединяющему проекции точки C_1 на прямые CA и CB.

4. AA_1, BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что треугольник с вершинами в ортоцентрах треугольников AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 равен треугольнику $A_1B_1C_1$.

5. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I. Отражения AB, AC относительно прямых CI, BI соответственно пересекаются в точке K. Докажите, что $KI \perp BC$.

6. (*Тригонометрическая теорема Чевы*) На прямых BC, CA, AB отмечены точки A_1, B_1, C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполнено соотношение:
$$\frac{\sin\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA_1})}{\sin\angle(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AC})} \cdot \frac{\sin\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BB_1})}{\sin\angle(\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{BA})} \cdot \frac{\sin\angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CC_1})}{\sin\angle(\overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{CB})} = 1.$$

7. (Полезная лемма) Докажите, что луч OB внутри угла AOC однозначно восстанавливается по значению величины $\sin\angle AOB / \sin\angle BOC$.

8. В треугольнике ABC проведена симедиана AS. Докажите, что $BS/CS = AB^2/AC^2$.

9. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром I касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно, M — середина BC. Докажите, что прямые B_1C_1, AM и IA_1 пересекаются в одной точке.

10. Внутри угла с вершиной O отмечена точка P. Рассмотрим всевозможные пары точек X и Y на сторонах угла с условием $\angle OPX = \angle OPY$. Докажите, что все прямые XY пересекаются в одной точке.

11. Две окружности радиусов R, r касаются горизонтальной прямой ℓ (сверху) в точках A и B. Пусть C — верхняя из точек пересечения этих окружностей. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника ABC не зависит от положения окружностей.