Геометрические неравенства

группы 9-1 и 9-2
11.02.2016

1. Дан четырёхугольник $ABCD$, причём $AB < BC$ и $AD < DC$. Точка M лежит на диагонали BD. Докажите, что $AM < MC$.

2. Из точки M внутри четырёхугольника $ABCD$ опущены перпендикуляры на стороны. Основания перпендикуляров лежат внутри сторон. Обозначим эти основания: то, которое лежит на стороне AB — через X, лежащее на стороне BC — через Y, лежащее на стороне CD — через Z, лежащее на стороне DA — через T. Известно, что $AX \geq XB, BY \geq YC, CZ \geq ZD, DT \geq TA$. Докажите, что вокруг четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность.

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса AA'. Обозначим за I точку пересечения биссектрис. Докажите, что $AI > A'I$.

4. Отрезки AB и CD длины 1 пересекаются в точке O , причем $\angle AOC = 60^\circ$. Докажите, что $AC + BD \geq 1$.

5. Длина каждой стороны выпуклого четырёхугольника $ABCD$ не меньше 1 и не больше 2. Его диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что $S_{AOB} + S_{COD} \leq 2(S_{AOD} + S_{BOC})$.

6. В треугольнике ABC угол A равен 60°. Точка M — середина BC. Докажите, что $AB + BC > 2AM$

7. На сторонах AB и BC квадрата $ABCD$ отмечены точки P и Q, соответственно. Оказалось, что $\angle PDQ = 75^\circ$. Докажите, что $AP + BC + CQ \geq PQ$.

8. На сторонах AB, BC и CA произвольного треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Обозначим через S_1, S_2 и S_3 площади треугольников $AB_1C_1, BA_1C_1, CA_1B_1$ соответственно. Докажите, что

$$\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} \leq \frac{3}{2}\sqrt{S_{ABC}}$$