Разнобой по геометрии

группа 9-1

01.02.2016

1. Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке X. На отрезках AX, DX отмечены точки P и Q соответственно, так что $\angle AQC = \angle BPD$. Докажите, что четырёхугольник $BCQP$ — вписанный.

2. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABC, ALB, ALC являются вершинами равнобедренного треугольника.

3. Биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекают его описанную окружность в точках B_0 и C_0 соответственно. Оказалось, что отрезок B_0C_0 касается вписанной в треугольник окружности. Найдите угол BAC.

4. На отрезке BC отмечены точки B_1, C_1. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственные стороны попарно параллельны. Докажите, что описанные окружности треугольников B_1A_1C и C_1A_1B пересекаются вторично на прямой AA_1.

5. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины дуг CAB, ABC, BCA описанной окружности ω треугольника ABC соответственно. Докажите, что точка пересечения касательных к ω, восстановленных в точках B_1, C_1, равноудалена от A и A_1.

6. Пусть H и M — ортоцентр остроугольного треугольника ABC и середина стороны BC соответственно. Прямая, проходящая через H перпендикулярно HM, пересекает стороны AB и AC в точках P и Q. Докажите, что H — середина PQ.

7. Докажите, что окружность, проходящая через основания проекций вершины D параллелограмма $ABCD$ на стороны треугольника ABC, проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма.

8. Четырёхугольник $ABCD$ — гармонический. Докажите, что отражение точки D относительно стороны AC лежит на прямой, содержащей медиану BM треугольника ABC.

9. На отрезке, соединяющем точку C с серединой медианы AM равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$), нашлась такая точка X, что $\angle MXC = 90°$. Докажите, что $\angle AXB = 90°$.