

Таблички

группа 9-1

25.01.2016

1. Дана таблица размером 8×8 , изображающая шахматную доску. За каждый шаг разрешается поменять местами любые два столбца или любые две строки. Можно ли за несколько шагов сделать так, чтобы верхняя половина таблицы стала белой, а нижняя половина — чёрной?
2. Квадрат 8×8 клеток выкрашен в белый цвет. Разрешается выбрать в нём любой прямоугольник из трёх клеток и перекрасить все их в противоположный цвет (два цвета: чёрный и белый). Удастся ли несколькими такими операциями перекрасить весь квадрат в чёрный цвет?
3. В клетках таблицы $2N \times 2N$ некоторым образом расставлены плюсы и минусы. За ход можно изменить знак во всех клетках любого «креста», то есть объединения некоторых строки и столбца. Докажите, что за несколько ходов можно получить таблицу из одних плюсов.
4. Имеется доска 100×100 , все клетки которой покрашены в три цвета. Разрешается перекрасить любой квадратик 2×2 в тот цвет, который в нём преобладает; а если такого нет, то в тот цвет, которого нет в квадратике. Докажите, что весь квадрат можно перекрасить в один цвет.
5. В таблице $n \times n$ расставлены действительные числа. Известно, что любые две строки различаются. Докажите, что можно удалить один столбец так, чтобы все строки опять различались.
6. В каждой клетке таблицы $n \times n$ стоят минусы. За один ход можно поменять знаки в одной фигуре Z-тетрамино (то есть клетчатой фигуре, которая получается сдвигом, поворотом или отражением из объединения клеток $a1, b1, b2, c2$ шахматной доски). При каких n можно получить таблицу со всеми плюсами?
7. Квадрат 9×9 разбит на 81 единичную клетку. Некоторые клетки закрашены, причём расстояние между центрами любых двух закрашенных клеток больше 2. Докажите, что максимальное количество клеток, которое может быть закрашено, равно 17.
8. Клетки доски 100×100 окрашены в четыре цвета, причём клетки, окрашенные в один цвет, не имеют общих вершин. Докажите, что клетки в углах доски окрашены в разные цвета.