

# Разнойой по алгебре

группа 9-1

14.01.2016

1. Решите уравнение в целых числах:  $7^x = 2^y 3^z + 1$ .
  2. Функция  $f$  удовлетворяет условиям  $f(1) + f(2) + \dots + f(n) = n^2 f(n)$  для всех натуральных  $n$ . Известно, что  $f(1) = 2$ . Найдите  $f(2013)$ .
  3. Пусть  $P(x)$  — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что в последовательности  $P(n)$  бесконечно много составных чисел.
  4. Даны положительные числа  $a, b, c$ , для которых  $a + b + c \geq abc$ . Докажите, что  $a^2 + b^2 + c^2 \geq abc$ .
  5. Известно, что  $abc = 1$  и  $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ . Докажите, что одно из чисел равно единице.
  6. Докажите, что для любых положительных  $x$  и  $y$  выполнено, что  $\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{xy}$ .
  7. Докажите, что для каждого натурального  $k$  существует лишь конечно число степеней двойки с суммой цифр  $k$ .
  8. Докажите, что многочлен  $x^{2014} - x^{2013} + 2013x^{1003} + 3$  не разложим на произведение двух многочленов с целыми коэффициентами.
- 

# Разнойой по алгебре

группа 9-1

14.01.2016

1. Решите уравнение в целых числах:  $7^x = 2^y 3^z + 1$ .
2. Функция  $f$  удовлетворяет условиям  $f(1) + f(2) + \dots + f(n) = n^2 f(n)$  для всех натуральных  $n$ . Известно, что  $f(1) = 2$ . Найдите  $f(2013)$ .
3. Пусть  $P(x)$  — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что в последовательности  $P(n)$  бесконечно много составных чисел.
4. Даны положительные числа  $a, b, c$ , для которых  $a + b + c \geq abc$ . Докажите, что  $a^2 + b^2 + c^2 \geq abc$ .
5. Известно, что  $abc = 1$  и  $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ . Докажите, что одно из чисел равно единице.
6. Докажите, что для любых положительных  $x$  и  $y$  выполнено, что  $\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{xy}$ .
7. Докажите, что для каждого натурального  $k$  существует лишь конечно число степеней двойки с суммой цифр  $k$ .
8. Докажите, что многочлен  $x^{2014} - x^{2013} + 2013x^{1003} + 3$  не разложим на произведение двух многочленов с целыми коэффициентами.