

Программа зачёта

группа 9-1

24.12.2015

1. Материальная точка, центр масс системы материальных точек. Его свойства: существование и единственность, явное описание для системы из двух точек («правило рычага»), лемма о перегруппировке масс.
2. Ориентированные углы. Определение, критерий коцикличности четвёрки точек. Навык оформления решений в терминах ориентированных углов.
3. Инверсия. Образы прямых и окружностей при инверсии. Свойство сохранения углов между прямыми или окружностями.
4. Степень точки относительно окружности, способы её вычисления. Радикальная ось и радикальный центр.
5. Эквивалентные определения гармонического четырёхугольника.
6. Лемма о велосипедистах (построение точки, равноудалённой относительно двух велосипедистов, стартовавших из точки пересечения окружностей в одинаковом направлении с равными угловыми скоростями).
7. Информационные оценки. Задача о минимальном числе взвешиваний, необходимых для поиска фальшивой монетки (легче настоящей) с помощью двухчашечных весов.
8. Множества и отображения. Инъективные, сюръективные и биективные отображения. Композиция отображений. Определения.
9. Группа преобразований. Определение, понятия орбиты элемента, стабилизатора элемента, множества неподвижных точек преобразования.
10. Лемма Бернсайда.
11. Ориентированные графы. Разбиение множества графа на компоненты сильной связности.
12. Формула Пика для площади многоугольников с вершинами в точках целочисленной решётки.
13. Перестановки, разложение в произведение транспозиций, существование и единственность разложения в произведение независимых циклических перестановок. Чётность перестановки.
14. Биномиальные коэффициенты. Алгебраические соотношения с биномиальными коэффициентами (явная формула, $\sum_{k=0}^n C_n^k, \sum_{k=0}^n kC_n^k, \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2$). Задача о количестве разбиений числа на упорядоченные натуральные слагаемые (шарики-перегородки).
15. НОД и НОК натуральных чисел, описание в терминах разложений на простые множители. Алгоритм Эвклида.
16. Классические теоремы теории чисел: теорема Вильсона, малая теорема Ферма, теорема Эйлера.
17. Функция Эйлера, её мультипликативность, явная формула для вычисления по известному разложению числа на простые множители.
18. Показатель остатка по модулю, определение, свойства.
19. Лемма об уточнении показателя.
20. Метод Штурма. Поведение суммы, произведения, суммы квадратов, суммы обратных и суммы n -х степеней при сближении двух чисел с фиксированной суммой или произведением.
21. Доказательство неравенства о средних с помощью метода Штурма.
22. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.
23. Деление многочленов с остатком. Единственность остатка и неполного частного.
24. Алгоритм Евклида для многочленов.
25. Теорема Безу. Теорема о количестве корней многочлена n -й степени.
26. Теорема о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами.