

Степени точек, радикальные оси и центры

группа 9-1

17.12.2015

1. В угол вписаны две окружности. Одна окружность касается одной стороны угла в точке A , вторая окружность касается другой стороны угла в точке B . Докажите, что прямая AB отсекает на окружностях равные хорды.
2. На окружности ω_1 с диаметром AB взята точка C , из точки C опущен перпендикуляр CH на прямую AB . Докажите, что общая хорда окружности ω_1 и окружности ω_2 с центром C и радиусом CH делит отрезок CH пополам.
3. Диагональ BD вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ является диаметром этой окружности. Докажите, что середина диагонали AC лежит на радикальной оси окружностей, построенных на отрезках AB и CD как на диаметрах.
4. К двум непересекающимся окружностям ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно проведена общая внешняя касательная BC ($B \in \omega_1, C \in \omega_2$). Отрезок O_1O_2 пересекает ω_1 и ω_2 в точках X и Y соответственно. Точку пересечения прямых BX и CY обозначим за A . Докажите, что медиана AM треугольника ABC перпендикулярна O_1O_2 .
5. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках M и N . Отрезок AB касается ω_1 в точке A ; середина AB лежит на прямой MN , точка B — вне ω_2 . Из точки B проведены касательные BX и BY к ω_2 (X и Y — точки касания). Докажите, что A, X, Y лежат на одной прямой.
6. В угол с вершиной X вписаны две окружности ω_1 и ω_2 , пересекающиеся в точках M и N . Луч ℓ с началом в X пересекает последовательно $\omega_1, \omega_2, \omega_1, \omega_2$ в точках A, B, C, D . Докажите, что касательные к B и C к ω_2 и ω_1 соответственно пересекаются на прямой MN .
7. Вписанная в треугольник ABC окружность ω касается стороны BC в точке A_1 . Пусть M — середина отрезка $I_A A_1$, где I_A — центр вневписанной окружности (только не спрашивайте, какой именно). Докажите, что длина отрезка касательной, проведённой из M к ω , равна MB .
8. В остроугольном неравностороннем треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1 . Докажите, что точки пересечения пар прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой Эйлера исходного треугольника.