Неравенство Коши-Буняковского-Шварца

группа 9-1

10.12.2015

Для любых вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ имеет место неравенство

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2),$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда на наборы a_i и b_i пропорциональны (или один из наборов нулевой).

1. Для положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ докажите неравенство:
$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$
2. Дан многочлен $f(x)$ с неотрицательными коэффициентами. Докажите, что $f^2(xy) \leqslant f(x^2)f(y^2)$.
3. Докажите, что для вещественных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выполнены неравенства:
   а) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 \leqslant x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$;
   б) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \ldots + x_{n-1}x_n \leqslant x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$.
4. Для положительных чисел a, b, c, d докажите неравенство:
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geqslant 2.$$
5. Для положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ докажите неравенство:
$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}.$$
6. Для положительных чисел a, b, c, d докажите неравенство:
$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geqslant \frac{2}{3}.$$
7. Сумма положительных чисел a, b, c, d равна 4. Докажите, что
$$\frac{a}{1+b^2c} + \frac{b}{1+c^2d} + \frac{c}{1+d^2a} + \frac{d}{1+a^2b} \geqslant 2.$$