Комбинаторная геометрия

группа 9-1
03.12.2015

1. Могут ли в выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ углы ACD, BDE, CEA, DAB, EBC быть тупыми?

2. Можно ли на столе положить некоторое количество монет (необязательно одинакового радиуса) так, чтобы каждая касалась шести других?

3. Вершины выпуклого пятиугольника расположены в узлах решетки. Докажите, что существует узел решетки, лежащий строго внутри пятиугольника.

4. На прямой расположено $2n+1$ отрезков. Каждый из них пересекает не менее n других. Докажите, что один из отрезков пересекает все остальные.

5. Докажите, что любые два непересекающихся выпуклых многоугольника можно отделить друг от друга прямой (*теорема Хана-Банаха*).

6. Внутри выпуклого n-угольника отмечена точка. Докажите, что ее проекция на одну из сторон попадет строго на сторону, а не на продолжение.

7. На плоскости дано n различных точек. Отметили середины всех отрезков их соединяющих. Докажите, что отметили хотя бы $2n-3$ различные точки.

8. X — непустое множество векторов а) на прямой б) на плоскости, удовлетворяющее следующим свойствам:

   а) Если $v \in X$, то $-v \in X$.

   б) Если $v \in X$ и $w \in X$, то $v + w \in X$.

   в) Любой ненулевой вектор из X имеет длину не менее 1.

   Докажите, что найдётся а) вектор e из X, такой что любой вектор из X равен $k \cdot e$, где k - целое. б) пара векторов e_1, e_2 из X такая, что любой вектор из X равен $k \cdot e_1 + l \cdot e_2$, где k, l - целые.