Радикальные оси

группа 9-1
30.11.2015

На плоскости даны окружность ω с центром O и радиусом R и точка X. *Степенью точки* X относительно окружности ω называется величина $\overline{XA}\cdot\overline{XB}$, где A и B — точки пересечения некоторой прямой, проходящей через X, с окружностью. Можно доказать, что степень точки не зависит от выбора секущей, равна $XO^2 - R^2$, а также равна квадрату длины касательной, если X лежит вне ω, и минус квадрату длины полухорды, перпендикулярной XO, если X лежит внутри ω.

1. Да плоскости даны две различные точки A и B, а c — вещественное число. Докажите, что ГМТ X плоскости, таких что $AX^2 - BX^2 = c$, является прямая, перпендикулярная AB.

   Следствие: все точки плоскости, имеющие равные степени относительно двух данных неконцентрических окружностей, составляют прямую, именуемую *радикальной осью* двух окружностей.

2. Пусть B_1, C_1 — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами AC и AB соответственно. На продолжениях сторон AB, AC за точки B и C отметили точки X, Y соответственно, так, что $C_1X = B_1Y = BC$. Докажите, что середины отрезков C_1X, B_1Y, BC лежат на одной прямой.

3. На боковых сторонах трапеции как на диаметрах построены окружности. Докажите, что отрезки касательных, проведенные к этим окружностям из точки пересечения диагоналей, равны.

4. Дан остроугольный треугольник ABC. Точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно, точка H — основание высоты, опущенной из вершины B. Описанные окружности треугольников AHN и CHM пересекаются в точке P (отличной от H). Докажите, что прямая PH проходит через середину отрезка MN.

5. Прямая OA касается окружности в точке A, а хорда BC параллельна OA. Прямые OB и OC вторично пересекают окружность в точках K и L. Докажите, что прямая KL делит отрезок OA пополам.

6. На плоскости даны точка X внутри окружности ω и точка A вне её. Через точку X проводятся всевозможные хорды BC. Найдите геометрическое место центров описанных окружностей треугольников ABC.

7. В пятиугольнике $ABCDE$ из каждой вершины опущены перпендикуляры на противоположные стороны (т. е. из A на CD, из B на DE, из C на EA, из D на AB, из E на BC). Четыре из них пересеклись в одной точке. Докажите, что все пять пересеклись в одной точке.

8. Периметр треугольника ABC равен 4. На лучах AB и AC отмечены точки X и Y так, что $AX = AY = 1$. Отрезки BC и XY пересекаются в точке M. Докажите, что периметр одного из треугольников ABM и ACM равен 2.