Комбинаторный разнобой

группа 9-1
26.11.2015

1. В полдень на каждую из трёх стрелок часов село по одной мухе. В течение дня при встрече двух стрелок мухи на них менялись местами. Сколько оборотов к полуночи совершила каждая из мух? Стрелки часов перемещаются непрерывно.

2. Иван и Абрам играют в игру. Абрам загадал число от 1 до k (k известно обоим игрокам), а Иван пытается его отгадать. Иван может задать любой вопрос с форматом ответа да/нет, а Абрам должен честно ответить на него. Причём если Абрам отвечает «да», то Иван платит ему одну монету; если Абрам отвечает «нет», Иван платит две монеты. Изначально у Ивана n монет. При каком максимальном k он сможет отгадать загаданное число?

3. Сколькими способами можно раскрасить доску 8×8 не более чем в два цвета? Две раскраски, отличающиеся друг от друга поворотом или симметрией доски, считаются одинаковыми.

4. Барон Мюнхгаузен вернулся из отпуска. «Удивительная страна. Стоимости перелётов между всеми парами городов разные, но у всех циклических маршрутов, проходящим по всем городам, суммарная стоимость перелётов одинаковая». Известно, что городов не менее 2015 и что любые два из них соединены двусторонней авиалинией. Могли ли слова барона оказаться правдой?

5. Докажите, что число состояний кубика Рубика не кратно 13 (положения центральных квадратов граней остаются постоянными при операциях).

6. Докажите, что в любом сильно связном ориентированном графе на $n \geqslant 3$ вершинах можно выкинуть несколько стрелок, оставив не более $2n-3$, так, чтобы граф остался сильно связным. Для каждого n предъявите пример сильно связного ориентированного графа на n вершинах с $2n-3$ стрелками, из которого нельзя ничего выкинуть без потери сильной связности.

7. Назовём положение часовой и минутной стрелок часов *симметричным*, если в некоторый момент суток они стоят в том же положении, только поменявшись местами. Сколько существует симметричных положений стрелок? Стрелки часов перемещаются непрерывно.

8. Несколько камней были разложены в N кучек. Затем камни разложили по-другому, в $n < N$ кучек. Докажите, что какой-то камень попал в кучку большем размера, чем та, в которой он лежал изначально.