Неравенства, часть 2

группа 9-1

22.10.2015

1. Докажите, что при всех вещественных x, y верно $x^8 + y^8 + 8 \geqslant 8xy$.
2. Найдите минимум выражения $x^3 + x^{-2}$ при $x > 0$.
3. Для натуральных чисел m, n, k докажите неравенство: $\frac{m^2+n^2+k^2}{m+n+k} \geqslant \sqrt[m+n+k]{m^m n^n k^k}$.
4. Докажите, что $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant abc(a + b + c)$, где a, b, c — положительные числа.
5. Найдите минимум выражения $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_3}{x_4} + \frac{x_5}{x_6}$, если $1 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4 \leqslant x_5 \leqslant x_6 \leqslant 1000$.
6. Даны положительные числа a, b, c. Докажите, что $abc \geqslant (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$.
7. Докажите, что при всех положительных x, y, z выполнено неравенство: $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geqslant x + y + z$.
8. Пусть a, b, c — положительные числа, $a + b + c = 3$. Докажите, что $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geqslant ab + bc + ca$.

Неравенства, часть 2

группа 9-1

22.10.2015

1. Докажите, что при всех вещественных x, y верно $x^8 + y^8 + 8 \geqslant 8xy$.
2. Найдите минимум выражения $x^3 + x^{-2}$ при $x > 0$.
3. Для натуральных чисел m, n, k докажите неравенство: $\frac{m^2+n^2+k^2}{m+n+k} \geqslant \sqrt[m+n+k]{m^m n^n k^k}$.
4. Докажите, что $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant abc(a + b + c)$, где a, b, c — положительные числа.
5. Найдите минимум выражения $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_3}{x_4} + \frac{x_5}{x_6}$, если $1 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4 \leqslant x_5 \leqslant x_6 \leqslant 1000$.
6. Даны положительные числа a, b, c. Докажите, что $abc \geqslant (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$.
7. Докажите, что при всех положительных x, y, z выполнено неравенство: $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geqslant x + y + z$.
8. Пусть a, b, c — положительные числа, $a + b + c = 3$. Докажите, что $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geqslant ab + bc + ca$.