Лемма об уточнении показателя

группа 9-1

15.10.2015

Для простого p и целого n будем обозначать символом $ord_p(n)$ степень, в которой число p входит в разложение числа n на простые множители.

Лемма. *Пусть a, b — различные целые числа, k — натуральное, p — простое, не являющееся делителем a, и пусть выполнено одно из условий 1 или 2. Тогда $ord_p(a^k - b^k) = ord_p(a-b) + ord_p(k)$.*
Условие 1: $p \neq 2$ и $ord_p(a-b) \geqslant 1$.
Условие 2: $p = 2$ и $ord_p(a-b) \geqslant 2$.

0. (*Доказательство леммы*) Предположим, что $a - b$ делится на p, но a не кратно p.

   а) Докажите, что $ord_p(a^p - b^p) > ord_p(a-b)$.

   б) Докажите, что $ord_p(a^s - b^s) = ord_p(a-b)$, если s не делится на p.

   в) Докажите, что $ord_p(a^k - b^k) \geqslant ord_p(a-b) + ord_p(k)$.

   г) Докажите, что если $p > 2$, то $ord_p(a^p - b^p) = ord_p(a-b) + 1$.

   д) Докажите лемму в случае, если выполнено условие 1.

   е) Докажите лемму в случае, если выполнено условие 2.

1. В какой степени число 5 входит в разложение на простые множители числа $3^{10000} - 2^{10000}$?

2. Докажите, что показатель числа 2 по модулю 3^n равен $\varphi(3^n)$.

   (*Напоминание*) Пусть a и m — натуральные числа, причём $(a, m) = 1$. *Показателем* числа a по модулю m называют наименьшее натуральное число δ, такое что $a^\delta - 1$ делится на m.

3. Решите в натуральных числах уравнение $3^x = 2^x y + 1$.

4. Какое наибольшее число нулей может быть среди 6 последних цифр числа 2^n для $n > 100$?

5. Докажите, что для любого натурального $a > 3$ существует бесконечно много натуральных n, что $a^n - 1$ делится на n^2.