# Вписанные уголки

*группа 9-1*
*12.10.2015*

1. Докажите, что проекции вершин вписанного четырёхугольника на диагонали, их не содержащие, лежат на одной окружности.

2. Две окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ пересекаются в точках $P$ и $Q$. Прямая пересекает последовательно окружности $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_1$, $\omega_2$ в точках $A$, $B$, $C$, $D$ соответственно. Докажите, что $\angle APB = \angle DQC$.

3. Касательные к описанной окружности остроугольного треугольника $ABC$, восстановленные в вершинах $B$ и $C$, пересекаются в точке $X$. Пусть $P$ и $Q$ — отражения точки $X$ относительно прямых $AB$, $AC$. Докажите, что прямая $PQ$ проходит через середину $BC$.

4. Есть параллелограмм $ABCD$ с острым углом $A$. Описанная окружность треугольника $ABD$ имеет центр $O$, а также пересекает (вторично) прямые $CB$ и $CD$ в точках $X$ и $Y$ соответственно. Докажите, что $AO$ — биссектриса угла $XAY$.

5. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке $N$. Окружности, описанные вокруг треугольников $ANB$ и $CND$, повторно пересекают стороны $BC$ и $AD$ в точках $A_1, B_1, C_1, D_1$. Докажите, что четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ вписан в окружность с центром $N$.

6. Три окружности проходят через точку $P$, а вторые точки их пересечения $A, B, C$ лежат на одной прямой. $A_1, B_1, C_1$ — вторые точки пересечения прямых $AP, BP, CP$ с соответствующими окружностями. $C_2$ — точка пересечения прямых $AB_1$ и $BA_1$. $A_2, B_2$ определяются аналогично. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.

7. Дан равнобедренный треугольник $ABC$, $AB = AC$; $O$, $I$ — центры его описанной и вписанной окружностей соответственно. Окружность $\omega$ описана вокруг треугольника $BIO$ и пересекает описанную окружность треугольника $ABC$ в точке $D$. Докажите, что $AD$ — касательная к $\omega$.

8. Окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ пересекаются в точках $P$ и $Q$. Через точку $A$ окружности $\omega_1$ проведены прямые $AP$ и $AQ$, пересекающие $\omega_2$ в точках $B$ и $C$, а через точку $D$ окружности $\omega_2$ — прямые $DP$ и $DQ$, пересекающие $\omega_1$ в точках $E$ и $F$ ($A$, $E$, $F$ лежат вне круга, ограниченного $\omega_2$ , а $D$, $B$, $C$ — вне круга, ограниченного $\omega_1$). Докажите, что если $AB = DE$, то точки $A$, $F$, $C$ и $D$ лежат на одной окружности.