# Неравенства

*группа 9-1*

*05.10.2015*

Неравенства между средними (слева направо: среднее гармоническое, геометрическое, арифметическое, квадратическое)

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}.$$

1. Положительные $x$, $y$, $z$ таковы, что $x+y+z=xyz$. Найдите минимум $xy+yz+zx$.
2. Докажите, что для положительных $a$ выполнено неравенство: $a^{40}+\frac{1}{a^{16}}+\frac{2}{a^4}+\frac{4}{a^2}+\frac{8}{a} \geqslant 16$.
3. Площадь треугольника равна $S$. Какое минимальное значение может принимать его периметр?
4. Докажите, что выполнено неравенство: $\sqrt{a+1}+\sqrt{2a-3}+\sqrt{50-3a} < 12$.
5. Даны вещественные $x_0 > x_1 > \ldots > x_n$. Докажите, что $x_0+\frac{1}{x_0-x_1}+\frac{1}{x_1-x_2}+\ldots+\frac{1}{x_{n-1}-x_n} \geqslant x_n+2n$.
6. Числа $a$, $b$, $c$ положительны. Докажите, что $\frac{3}{2}(a^4+b^4+c^4)+24 \geqslant 4a^2b+4b^2c+4c^2a$.
7. Для положительный чисел $a, b, c$ докажите неравенство: $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$.
8. Пусть $a, b$ — натуральные числа. Докажите неравенство: $2\sqrt[a+b]{a^{2b}b^{2a}} \leqslant a^2+b^2$.