# Алгебраические конструкции в комбинаторике

*группа 9-1*

*01.10.2015*

1. Алфавит состоит из $k$ букв, словом считается любая последовательность из $n$ букв алфавита. Два слова похожи, если они различаются ровно в одной букве. В какое минимальное число цветов можно раскрасить все слова, так чтобы любые два похожих слова были разного цвета?

2. Математические кружки в Хамовниках посещают школьники 9, 10 и 11 классов, по $n$ школьников в каждой параллели. После каждого занятия назначается тройка добровольцев (по одному из каждого класса) для наведения порядка в кабинетах (убирают недопитый чай, невыброшенные стаканчики, мусор неизвестного происхождения; также они расставляют по местам стулья в кабинете и в коридоре). Какое максимальное количество занятий может пройти так, чтобы никакая пара школьников не попадала два раза в тройку добровольцев?

3. В новом году в Хамовниках добавили дополнительную группу, которую также посещают $n$ человек, и теперь отряд добровольцев состоит из четырёх школьников из разных групп. Как долго можно назначать добровольцев таким образом, чтобы никакая тройка школьников не попадала в добровольцы два раза?

4. В условия предыдущей задачи какое максимальное число дней можно назначать добровольцев так, чтобы никакая пара не была назначена в четвёрку два раза, если а) $n$ нечётно; б) $n = 4$?

5. На каждого из $k$ школьников, не сдавших вовремя письменную задачу, надели по колпаку одного из $m$ цветов (цвета могут повторяться). Школьники видят цвета всех колпаков, кроме своего. Затем все одновременно называют предполагаемый цвет своего колпака. Если никто из школьников не угадывает цвет своего колпака, всем школьникам ставят двойки, в противном случае всех прощают, а дедлайн продлевают до следующего понедельника. Параметры $k$, $m$ и цвета колпаков известны школьникам заранее. При каких $k$, $m$ школьники могут договориться действовать так, чтобы всех простили и чтобы дедлайн был продлён?

6. Опишите все способы раскрасить все натуральные числа в три цвета таким образом, чтобы любая тройка (не обязательно различных) натуральных чисел $a$, $b$, $c$, удовлетворяющая соотношению $2015(a + b) = c$, была раскрашена либо в три одинаковых, либо в три разных цвета.

7. Фокусник и ассистент показывают следующий фокус. Один из зрителей пишет на доске последовательность из $n$ цифр. Ассистент закрывает чёрной табличкой любые две соседние цифры. Затем входит фокусник. Его цель — отгадать обе закрытые цифры (и в каком они порядке). При каком наименьшем $n$ фокус осуществим вне зависимости от последовательности, которую предложит зритель?

8. Фокусник и ассистент показывают карточный фокус. Зритель выбирает 5 карт из колоды, содержащей 52 карты, и передаёт их ассистенту.

   а) Ассистент выкладывает их в ряд слева направо, причём одну из карт кладёт картинкой вниз, а остальные — картинкой вверх. Докажите, что они могут договориться действовать так, чтобы фокусник всегда мог отгадать скрытую карту.

   б) Ассистент выбирает по своему усмотрению 4 карты и выкладывает их в некотором порядке. Могут ли участники фокуса так договориться, чтобы фокусник всегда отгадывал невыложенную карту?