

Геометрия

группа 9-1

21.09.2015

1. Во вписанном четырёхугольнике одна из диагоналей является диаметром окружности. Докажите, что проекции противоположных сторон на другую диагональ равны.
2. (*Теорема Помпею*) На меньшей дуге BC описанной окружности равностороннего треугольника ABC отмечена точка X . Докажите, что $AX = BX + CX$.
3. К двум касающимся внешним образом окружностям провели две общие касательные. Докажите, что четырёхугольник, образованный точками касания окружностей с проведёнными касательными, описанный.
4. Через центр квадрата проведена прямая. Докажите, что сумма квадратов расстояний от его вершин до этой прямой не зависит от выбора направления прямой.
5. На всех шести лучах, являющихся продолжениями сторон треугольника ABC , отложили отрезки, равные по длине противоположной стороне треугольника (т.е. на лучах с началом A отмечены отрезки AA_1, AA_2 , равные отрезку BC). Докажите, что шесть концов отложенных отрезков лежат на одной окружности (*окружность Конвея*).
6. Про треугольник ABC известно, что $\angle A = 60^\circ$. Его биссектрисы BB_1 и CC_1 пересекаются в точке I . Докажите, что $B_1I = C_1I$.
7. Даны две непересекающиеся окружности. С помощью циркуля и линейки постройте их общие внешние и внутренние касательные.
8. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке S . На стороне BC нашлась такая точка X , что $\angle SXC = \angle BCD$. Докажите, что $AX = DX$.
9. Три окружности равного радиуса проходят через одну точку. Докажите, что окружность, проходящая через вторые точки пересечения исходных окружностей, имеет тот же радиус.
10. На стороне BC остроугольного треугольника ABC отмечена точка X . Описанные окружности треугольников AXB и AXC пересекают отрезки AC и AB вторично в точках P и Q соответственно. O — центр описанной окружности треугольника APQ . Докажите, что $OX \perp BC$.
11. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. K — точка вписанной окружности, диаметрально противоположная A_1 . Прямые A_1B_1 и C_1K пересекаются в точке P . Докажите, что $AP = AB_1 = AC_1$.
12. В параллелограмме $ABCD$ отмечена точка X , так что $\angle XAB = \angle XCB$. Докажите, что $\angle XBC = \angle XDC$.