Теория чисел

Группа 9-1
07.09.2015

Теорема (Ферма, малая). $a^p \equiv a$ (*mod* p) *для всякого целого* a *и натурального* p.

Определение. Обозначим $\varphi(n)$ количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n. Тогда $\varphi(n)$ называют *функцией Эйлера* натурального числа n.

Теорема (Эйлер). $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$ *при всех натуральных взаимно простых* a *и* n.

Теорема (Вильсон). $(p-1)!+1$ *делится на* p *тогда и только тогда, когда* p *— простое число.*

Определение. При $(a,m)=1$ существует натуральное δ с условием $a^\delta \equiv 1 \pmod m$. Наименьшее из таких чисел называется *показателем* a *по модулю* m.

Утверждение. *Если* $a^k \equiv 1 \pmod m$, *то* k *делится на* δ.

1. Пусть p и q — различные простые числа. Докажите, что $p^q + q^p \equiv p + q \pmod{pq}$.
2. Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^{128}+b^{128}+c^{128}$ делится на 257. Докажите, что число abc делится на 257.
3. Докажите, что если p — простое, то следующее число кратно p:
$$\underbrace{1\dots1}_{p}\underbrace{2\dots2}_{p}\underbrace{3\dots3}_{p}\dots\underbrace{9\dots9}_{p}-123456789.$$
4. Докажите, что y^2+y+1 не делится на 101 ни при каком натуральном y.
5. Пусть p — простое число. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_p$ — конечная арифметическая прогрессия с разностью, не кратной p. Докажите, что в ней можно найти элемент a_k, что число $a_k + a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_p$ делится на p^2.
6. Найдите наименьшее натуральное число $a \geqslant 2$, такое что существует простое p, что число $\frac{a^p-a}{p}$ является полным квадратом и a не делится на p.
7. Пусть $n > 3$ — нечетное натуральное число. Докажите, что число $2^{\varphi(n)}-1$ имеет простой делитель, которого не имеет число n.
8. Даны натуральные числа $2 \le x, y \le 100$. Докажите, что при некотором натуральном n число $x^{2^n}+y^{2^n}$ — составное.