

Формула Пика

0. Нарисуйте треугольник площади $1/2$, у которого все стороны больше 5, а вершины лежат в узлах сетки.
1. Можно ли квадрат 50×50 разбить на 15 одинаковых многоугольников с вершинами в узлах квадрата?
2. Точку M внутри треугольника соединили с его вершинами, в результате треугольник разбился на три равновеликие части. Докажите, что M — точка пересечения медиан треугольника.
3. Вершины треугольника расположены в узлах клетчатой бумаги, причем на его сторонах других узлов нет, а внутри есть ровно один узел. Докажите, что — точка пересечения медиан треугольника.
4. Пусть i и j — два узла клетчатой бумаги, из которых второй на p клеток правее и на q клеток выше первого. Чему равно расстояние от прямой до ближайшего к ней узла, не лежащего на этой прямой?
5. Докажите, что найдется прямая, проходящая через два узла клетчатой бумаги, и не лежащий на этой прямой узел, такой, что расстояние между ними меньше $\frac{1}{2016}$.
6. Найдется ли правильный треугольник с вершинами в узлах сетки?
7. Найдется ли прямоугольный треугольник с целыми сторонами и вершинами в узлах сетки на сторонах которого нет узлов сетки кроме вершин;
8. Найдется ли прямоугольный треугольник с целыми сторонами и вершинами в узлах сетки ни одна из сторон которого не проходит по линиям сетки?
9. Докажите, что если вершины выпуклого n -угольника лежат в узлах клетчатой бумаги, а внутри и на его сторонах других узлов нет, то $n < 5$.
10. Ладья, шагая по одной клетке, за 64 хода обошла все клетки шахматной доски и вернулась на исходную клетку. Докажите, что число ходов по вертикали не равно числу ходов по горизонтали.
11. На большой шахматной доске отметили $2n$ клеток так, что ладья может ходить по всем отмеченным клеткам, не перепрыгивая через неотмеченные. Докажите, что фигуру из отмеченных клеток можно разрезать на n прямоугольников.
12. Докажите, что квадрат со стороной n не может накрыть более $(n + 1)^2$ точек целочисленной решётки.