

Двудольные графы

Определение. Граф называется *двудольным*, если его вершины можно раскрасить в два цвета так, чтобы любое ребро соединяло вершины разных цветов.

Разминка

1. В классе каждый мальчик дружит с тремя девочками, а каждая девочка — с пятью мальчиками. 17 из них любят играть в матбой, и в классе 15 парт. Сколько всего ребят в классе?
2. Докажите, что в двудольном графе суммы степеней вершин каждого цвета совпадают между собой.
3. Какое наибольшее число ребер может быть в двудольном графе на n вершинах.
4. Замок в форме правильного треугольника со стороной 50 метров разбит на 100 треугольных залов со сторонами 5 метров. В каждой стенке между залами есть дверь. Какое наибольшее число залов сможет обойти турист, не заходя ни в какой зал дважды?

Вокруг критерия двудольности

5. Докажите, что дерево является двудольным графом
6. (а) В некоторой стране, состоящей из двух областей, любая дорога соединяет два города из разных областей. Докажите, что любой кольцевой маршрут проходит через четное число городов.
(б) В некоторой стране любой кольцевой маршрут проходит через четное число городов. Докажите, что все города можно разделить на две области так, чтобы любая дорога соединяла города из разных областей.
7. Леша записал в каждой вершине связного графа вещественное число. Потом пришел Олег, записал на каждом ребре сумму чисел в вершинах и стер Лешины числа. Для каких графов Игорь гарантированно сможет восстановить числа, написанные Лешей?

Разные задачи

8. В классе 20 человек. Каждый день либо ровно один ученик заболевает либо ровно один выздоравливает (дети школу не прогуливают), а если в классе остается менее 4 здоровых детей, то уроки отменяются. Могло ли так оказаться, что уроки не отменялись, а в классе присутствовали по разу все возможные наборы из не менее, чем четырех учеников?

9. Несколько равносторонних треугольников на плоскости не перекрываются. Всегда ли можно раскрасить их в два цвета так, чтобы треугольники с общим отрезком границы были разного цвета?
10. (а) Докажите, что если у выпуклого многогранника все грани имеют четный размер, то его вершины можно покрасить в два цвета так, чтобы соседние вершины были разного цвета.
- (б) У выпуклого многогранника степени всех вершин четны, а размеры всех граней, кроме A , делятся на 5. Докажите, что размер A тоже делится на 5.
11. (а) Докажите, что не существует правильного треугольника с вершинами в узлах клетчатой решетки.
- (б) Все узлы листа тетради в клетку, находящиеся на расстоянии L соединили ребром. Докажите, что получившийся граф двудольный.
12. Дан белый квадрат 10×10 . За ход можно выбрать 4 белые клетки на пересечении двух строк и двух столбцов и одну из них покрасить. Какое наибольшее количество клеток можно покрасить?