# Китайская теорема об остатках

1. Найдите наименьшее натуральное число, которое давало бы остатки 1, 2, 4 и 6 при делении на 2, 3, 5 и 7 соответственно.

2. Найдите наименьшее натуральное число, половина которого квадрат, треть — куб, а одна пятая — пятая степень.

3. Пусть НОД$(m_1, m_2) = 1$.

   (a) Докажите, что существует $a$ такое, что $a \equiv 0 \pmod{m_1}$ и $a \equiv 1 \pmod{m_2}$.

   (b) Докажите, что для любых $r_1, r_2$ существует $a$ такое, что $a \equiv r_1 \pmod{m_1}$ и $a \equiv r_2 \pmod{m_2}$.

4. (Китайская теорема об остатках) Пусть числа $m_1, \ldots, m_n$ попарно взаимнопросты. Докажите, что для любых $r_1, \ldots, r_n$ существует ровно одно число $a$ такое, что $0 \leqslant a < m_1 \cdot \ldots \cdot m_n$ и
$$\begin{cases} a \equiv r_1 \pmod{m_1} \\ a \equiv r_2 \pmod{m_2} \\ \vdots \\ a \equiv r_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

5. Решить уравнение $x^2 - 25 \equiv 0 \pmod{143}$.

6. Трехзначное число 625 обладает своеобразным свойством самовоспроизводимости, как то: $625^2 = 390625$. Сколько четырехзначных чисел удовлетворяют уравнению $x^2 \equiv x \pmod{10000}$?

7. Генерал хочет построить для парада своих солдат в одинаковые квадратные каре (в каре должно быть больше одного человека), но он не знает сколько солдат (от 1 до 42) находится в лазарете. Докажите, что у генерала может быть такое количество солдат, что он, независимо от заполнения лазарета, сумеет выполнить свое намерение. (Например, войско из 9 человек можно поставить в виде квадрата $3 \times 3$, а если один человек болен, то в виде двух квадратов $2 \times 2$.)

8. Про многочлен $p(x)$ с целыми коэффициркнтами известно, что для любого целого $n$ число $p(n)$ делится на одно из целых чисел $a_1, \ldots, a_m$. Докажите, что из этих чисел можно выбрать одно число так, что $p(n)$ будет делиться на него при любом целом $n$.