Теоретико-числовой разнобой

1. Докажите, что m^2+n и n^2+m не могут одновременно являться квадратами натуральных чисел при натуральных n и m.

2. Найдите наибольшее четырехзначное число, все цифры которого различны и которое делится на 2, 5, 9 и 11.

3. Докажите, что $30^{300}-1$ делится на 1001.

4. Ученик за одну неделю получил 13 оценок, среднее арифметическое которых - целое число. Докажите, что какую-то оценку он получил не более двух раз.

5. Найдите все n такие, что $n!+5$ - куб.

6. Докажите, что в разложение произведения десяти последовательных натуральных трехзначных чисел на простые множители входит не более десяти различных простых чисел.

7. Натуральные числа $x, y > 1$ таковы, что x^2+y^2+1 кратно $x+y-1$. Докажите, что число $x+y-1$ не может быть простым.

8. Несколько крутых антропологов привлекли по несколько учеников на свои занятия, у всех поровну. Время от времени какие-то антропологи отдают каждому из остальных поровну из своих учеников. После многократного повторения такой процедуры у Саши осталось 23 ученика, а у Ани 6. Сколько было антропологов?

9. Взяли четыре натуральных числа. Для каждой пары этих чисел выписали их наибольший общий делитель. Получилось шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, N, где $N > 5$. Какое наименьшее значение может принимать число N?

10. Десятичная запись натурального числа N составлена только из единиц и двоек. Известно, что вычеркиванием цифр из этого числа можно получить любое из 10000 чисел, состоящих из 9999 единиц и одной двойки. Найдите наименьшее возможное количество цифр в десятичной записи числа N.