Неравенство Коши, Буняковского и немного Шварца

Теорема (Коши, Буняковский). *Для действительных чисел* x_1, x_2, …, x_n, y_1, y_2, …, y_n *имеет место неравенство*

$$(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2) \geqslant (x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)^2.$$

1. Пусть $a+b+c=1$. Докажите, что $a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{1}{3}$.
2. Докажите, что $a\sqrt{a^2+c^2}+b\sqrt{b^2+c^2} \leqslant a^2+b^2+c^2$.
3. (неравенство Минковского). Даны положительные числа a_1, a_2, …, a_n. Пользуясь КБШ, докажите, что
$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\cdot\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$
4. Докажите, что для положительных x_1, x_2, …, x_n имеет место неравенство
$$n(x_1+x_2+\ldots+x_n) \geqslant \left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\ldots+\sqrt{x_n}\right)^2.$$
5. Известно, что $a+b+c=1$. Найдите максимальное значение выражения $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}$.
6. Известно, что $9x^2+16y^2+144z^2=169$. Найдите максимальное значение выражения $6x-4y+24z$.
7. (ОЧЕНЬ важное следствие) Для положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ имеет место неравенство
$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{b_1+b_2+\ldots+b_n}.$$
8. Докажите, что положительных чисел a_1, a_2, …, a_n имеет место неравенство
$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1} \geqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{2}.$$
9. Даны положительные числа a, b, c. С помощью КБШ докажите неравенство $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$.
10. Даны положительные числа a, b, c, d. Найдите максимальное значение выражения
$$\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}.$$

11. Для любых положительных a_1, a_2, …, a_n докажите неравенство

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(a_1^7 + a_2^7 + \ldots + a_n^7) \geqslant (a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3)(a_1^5 + a_2^5 + \ldots + a_n^5).$$

12. (неравенство Ацеля) Про вещественные числа a_1, a_2, …, a_n, b_1, b_2, …, b_n известно, что $a_1^2 \geqslant a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2$. Тогда имеет место неравенство

$$(a_1 b_1 - a_2 b_2 - \ldots - a_n b_n)^2 \geqslant (a_1^2 - a_2^2 - \ldots - a_n^2)(b_1^2 - b_2^2 - \ldots - b_n^2).$$