Цепные дроби

Выражение

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \frac{1}{a_n}}},$$

где a_0 — целое, a_1, …, a_n — натуральные, и $a_n > 1$, называется *цепной дробью*. Для краткости обозначают это через $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$.

1. Представьте в виде цепной дроби число $\frac{129}{111}$.
2. Решите в натуральных числах уравнение
$$\frac{10}{7} = a + \cfrac{1}{b + \frac{1}{c}}$$
3. Пусть $\frac{p_n}{q_n} = [1; 1, 1, \ldots, 1]$ (единиц n штук) — несократимая дробь. Чему равны p_n и q_n?
4. Пусть $n > k$. Какое из чисел $[a_0; a_1, \ldots, a_k]$ и $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ больше?
5. Пусть есть длинная цепная дробь $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$. Для всякого $k \leqslant n$ можно определить *подходящую дробь* $\frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, \ldots, a_k]$. Выразите p_k и q_k через p_{k-2}, q_{k-2}, p_{k-1}, q_{k-1} и a_k.
6. Докажите, что $p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k+1}$.
7. (a) Докажите, что $\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k+1}}{q_k q_{k-1}}$.

   (b) Пусть $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$. Докажите, что $\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k^2}$.
8. А чему равно
$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}?$$
9. (a) Придумайте бесконечную цепную дробь для числа $\sqrt{2}$.

   (b) Найдите с помощью этого разложения рациональное число, отличающееся от $\sqrt{2}$ меньше, чем на 0.01.