Еонйенил еинелватсдерп ДОН

Теоремка. *Пусть НОД$(a, b) = 1$. Тогда существуют целые x и y такие, что $ax + by = 1$.*

1. Докажите, что с помощью циркуля и линейки можно разделить угол 19° на 19 равных частей.

2. Петя Торт и девочка Катя прыгают по экватору небольшой планеты длиной в один километр. Каждую секунду они делают по одному прыжку вперед. Петя прыгает на 19 метров в длину (гравитация слабая), а Катя — только на 2. Докажите, что найдется момент, когда Катя будет обгонять Петю ровно на один метр.

3. Пусть НОД$(a, b) = 1$. Целые числа x_0, y_0, x_1, y_1 таковы, что $ax_0 + by_0 = ax_1 + by_1 = 1$. Докажите, что для некоторого целого k выполнены равенства $x_1 = x_0 + kb$ и $y_1 = y_0 - ka$.

4. У Пети есть 10000 рублей и он хочет потратить их на шоколадки. Шоколадки бывают стоимостью 49 рублей или 53 рубля. Сколькимим способами он сможет это сделать?

5. Решите в целых числах $2x + 3y + 5z = 1$.

6. Существует ли в сутках момент, когда расположенные на общей оси часовая, минутная и секундная стрелки правильно идущих часов образуют попарно углы в 120°?

7. Петя разложил какое-то количество гвоздей по пятнадцати коробкам. После этого он может выбрать любые k коробок и доложить в каждую по гвоздю. При каких k он всегда сможет такими операциями уравнять количество гвоздей во всех коробках?

8. Целые числа $a_1, \ldots, a_n$ взаимно просты в совокупности. Докажите, что найдутся такие $x_1, \ldots, x_n$, что $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 1$.

9. Пусть a и b — натуральные и взаимно простые.
   (a) Докажите, что уравнение $ax + by = c$ имеет неотрицательное решение для всех $c > ab$.
   (b) (теорема Сильвестра) То же для $c > ab - a - b$.
   (c) Известно, что уравнение $ax + by = c$ имеет ровно n положительных решений. Докажите, что

$$(n-1)ab + a + b \leqslant c \leqslant (n+1)ab - a - b$$