Разнобой по Эйлерам

1. Незнайка выписал по кругу 11 натуральных чисел. Для каждых двух соседних чисел он посчитал их разность (из большего вычел меньшее). В результате среди найденных разностей оказалось четыре единицы, четыре двойки и три тройки. Докажите, что Незнайка где-то допустил ошибку.

2. На стороне BC треугольника ABC взята точка D так, что серединный перпендикуляр к отрезку AD проходит через центр вписаной окружности треугольника ABC. Докажите, что этот серединный перпендикуляр проходит через одну из вершин.

3. На столе лежат 100 одинаковых с виду монет, из которых 85 фальшивых и 15 настоящих. В вашем распоряжении есть чудо-тестер, в который можно положить две монеты и получить один из трех результатов — «обе монеты настоящие», «обе монеты фальшивые» и «монеты разные». Можно ли за 64 таких теста найти все фальшивые монеты?

4. В каждую клетку таблицы 2016×2016 вписан либо нуль, либо единица, причем в каждом столбце и каждой строке есть как нули, так и единицы. Докажите, что в этой таблице найдутся две строки и два столбца такие, что на концах одной из диагоналей образованного ими прямоугольника стоят нули, а другой — единицы.

5. 99 мудрецов сели за круглый стол. Им известно, что пятидесяти из них надели колпаки одного из двух цветов, а сорока девяти остальным — другого (но заранее неизвестно, какого именно из двух цветов 50 колпаков, а какого — 49). Каждый из мудрецов видит цвета всех колпаков, кроме своего собственного. Все мудрецы должны одновременно написать (каждый на своей бумажке) цвет своего колпака. Смогут ли мудрецы заранее договориться отвечать так, чтобы не менее 74 из них дали верные ответы?

6. В четырехугольнике $ABCD$ с равными диагоналями отметили точку O — пересечение диагоналей и отметили точку P, такую что $CP \parallel AB$ и $BP \parallel CD$. докажите, что точка P лежит на биссектриссе угла AOD.

7. В четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны. На этих сторонах отметили точки N и M соответственно. Оказазалось, что $NC \parallel AM$ и $ND \parallel BM$. Докажите, что прямая KM образует одинаковые углы с прямыми AB и CD.

8. На доске написано число 1. Если на доске написано число a, его можно заменить любым числом вида $a + d$, где d взаимно просто с a и $10 \leq d \leq 20$. Можно ли через несколько таких операций получить на доске число $18! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 18$?

9. 2016 различных положительных чисел записаны в ряд в порядке возрастания. Вася разбил эти числа на 1008 пар соседних и нашел суммы чисел во всех парах. Петя разбил эти же числа на 1008 пар таким образом, что между числами в каждой паре стоит ровно три других числа, и тоже нашел суммы чисел во всех парах. Докажите, что произведение сумм, найденных Петей, больше, чем произведение сумм, найденных Васей.

10. Занумеруем все простые числа в порядке возрастания: $p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots$. Может ли среднее арифметическое $\frac{p_1+\ldots+p_n}{n}$ при каком-нибудь $n \geqslant 2$ быть простым числом?

11. Натуральные числа a, b таковы, что a^{41} делится на b^{20} и $a < 1000000$. Докажите, что a^2 делится на b