Раскраски

1. Из куба $3 \times 3 \times 3$ выкинут центральный единичный кубик. Докажите, что полученную фигуру нельзя разрезать на параллелепипеды размера $1 \times 1 \times 2$.

2. Доска 100×100 разбита на 10000 единичных квадратиков. Один из них вырезали, так что образовалась дырка. Можно ли оставшуюся часть доски покрыть равнобедренными прямоугольными треугольниками с гипотенузой длины 2 так, чтобы их гипотенузы шли по сторонам квадратиков, а катеты – по диагоналям и чтобы треугольники не налегали друг на друга и не свисали с доски?

3. Дана ладья, которой разрешается делать ходы только длиной в одну клетку. Доказать, что она может обойти все клетки прямоугольной шахматной доски (длины сторон больше единицы), побывав на каждой клетке ровно один раз, и вернуться в начальную клетку тогда и только тогда, когда число клеток на доске чётно.

4. Докажите, что доску 10×10 нельзя покрыть прямоугольниками 1×4.

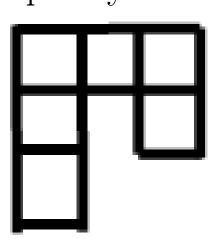
5. Докажите, что доску размером 10×10 клеток нельзя разрезать на фигурки в форме буквы Т, состоящие из четырех клеток.

6. Какое наибольшее количество прямоугольников 4×1 можно разместить в квадрате 6×6?

7. Грани куба $9 \times 9 \times 9$ разбиты на единичные клетки. Куб оклеен без наложений бумажными полосками 2×1 (стороны полосок идут по сторонам клеток). Докажите, что число согнутых полосок нечетно.

8. Дана доска 15×15. Некоторые пары центров соседних по стороне клеток соединили отрезками так, что получилась замкнутая несамопересекающаяся ломаная, симметричная относительно одной из диагоналей доски. Докажите, что длина ломаной не больше 200.

9. Доска 8×8 покрыта прямоугольникам 1×3 так, что свободной осталась ровно одна клетка. Где она может находиться?

10. Найдите все такие m и n, что клетчатый прямоугольника $m \times n$ можно разбить  на фигурки изображенные на рисунке.