

Слава Евклиду!

1. Найдите НОД чисел:

(a) $(140459973, 84275984)$

(b) $(3703889, 1587381)$.

2. Докажите, что при любом натуральном n дробь $\frac{18n+5}{27n+7}$ несократима

3. Пусть m, n — взаимно простые натуральные числа. Найдите наибольшее возможное значение $(m + 2015n, n + 2015m)$

4. Найдите НОД чисел:

(a) $(\underbrace{11 \dots 11}_{100}, \underbrace{11 \dots 11}_{60})$.

(b) $(2^{2015} - 1, 2^{1001} - 1)$.

5. (a) Пусть алгоритм Евклида для чисел a, b ($a > b$) сошелся за n шагов. Докажите, что $a \geq F_{n+2}, b \geq F_{n+1}$, где F_n — n -ое число Фибоначчи.

(b) Докажите, что при $n > 2$ выполнено неравенство $F_{n+5} \geq \frac{21}{2}F_n$.

(c) Докажите, что алгоритм Евклида для двух k -значных чисел сойдется не позже, чем через $5k - 1$ шаг.

6. (a) Докажите, что два соседних числа Фибоначчи взаимно просты.

(b) Обозначим за F_n — n -ое число Фибоначчи ($F_1 = F_2 = 1$). Докажите, что $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$

Указание: рассмотрите последовательность Фибоначчи по модулю k

7. На доске написано два натуральных числа a, b . За один ход вместо меньшего из них записывают число $\frac{ab}{|a-b|}$.

(a) Докажите, что через конечное число шагов получится два равных числа.

(b) Докажите, что получившиеся числа натуральные.