Вписанные углы 2

1. (прямая Симсона) На описанной окружности треугольника ABC выбрана точка P. Из точки P на стороны AB, BC и AC опущенны перпендикуляры PC_1, PA_1 и PB_1 соответственно. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

2. В произвольном четырехугольнике провели бисектриссы всех внутренних углов. Докажите, что четырехугольник, образованный этими четырьмя прямыми - вписанный.

3. В треугольнике ABC отметим точку пересечения высот H. Пусть прямая AH Пересекает прямую BC в точке A_1, а описанную окружность треугольника ABC - в точке A'. Докажите, что $HA_1 = A_1A'$.

4. В треугольнике ABC проведена высота AA'. Пусть A_1 — точка на луче AB такая, что $AA' = AA_1$. Аналогичным образом определяется точка C_1. Докажите, что $C_1A_1 \parallel AC$.

5. (a) В треугольнике ABC отметим точку пересечения высот H. Отразим ее относительно середины стороны BC, получим точку A_2. Докаите, что эта точка лежит на описанной окружности треугольника ABC

   (b) Построим аналогичным образом точки B_2 и C_2. Докажите, что треугольник ABC равен треугольнику $A_2B_2C_2$.

6. В равнобедренном треугольника ABC $(AB = AC)$ отмечена точка M - середина BC и проведена окружность ω с центром в точке A и радиусом, меньшим AB. Пусть BP и CQ - касательные к ω такие, что PQ и BC не параллельны. Докажите, что точки P, Q и M лежат на одной прямой.

7. На описанной окружности треугольника ABC отмечена точка P и точка B', такая, что $PB' \perp AC$. Докажите, что прямая BB' параллельна прямой Симсона точки P.

8. Дан прямоугольник $ABCD$. Через вершину B проведены две перпендикулярные прямые. Первая прямая пересекает отрезок AD в точке K, вторая прямая пересекает продолжение отрезка CD в точке L. Пусть прямые KL и AC пересекаются в точке F. Докажите, что отрезок BF перпендикулярен KL.

9. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB = AC)$ проведена бисектриссв BE. Пусть O - центр описанной окружности треугольника BEC. Пусть биссектрисса угла C пересекает отрезок OE в точке F. Докажите, что точка F лежит на прямой, соединяющей середины отрезков EB и EC.