

## Вписанные углы

1. Биссектриса внешнего угла при вершине  $C$  треугольника  $ABC$  пересекает описанную окружность в точке  $D$ . Докажите, что  $AD = BD$ .
2. Пусть две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Одна прямая проходит через  $A$  и пересекает первую и вторую окружности в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. Другая прямая проходит через  $B$  и пересекает первую и вторую окружности в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Докажите, что  $XP \parallel YQ$ .
3. Диагонали трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Описанные окружности треугольников  $AOB$  и  $COD$  пересекаются в точке  $M$  на основании  $AD$ . Докажите, что треугольник  $BMC$  равнобедренный.
4. В треугольнике  $ABC$  проведена высота  $BH$ . Из точки  $H$  опущены перпендикуляры  $HX$  и  $HY$  на прямые  $BA$  и  $BC$  соответственно. Докажите, что точки  $A$ ,  $X$ ,  $Y$  и  $C$  лежат на одной окружности.
5. Четырехугольник  $ABCD$  - ромб. На стороне  $BC$  взята точка  $P$ . Через точки  $A$ ,  $B$  и  $P$  проведена окружность, которая пересекается с прямой  $BD$  еще раз в точке  $Q$ . Через точки  $C$ ,  $P$  и  $Q$  проведена окружность, которая пересекается с  $BD$  еще раз в точке  $R$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $R$  и  $P$  лежат на одной прямой.
6. Внутри  $\angle AOB$  взята точка  $C$ . Из нее опущены перпендикуляры:  $CD$  на сторону  $OA$ ;  $CE$  - на сторону  $OB$ . Из точек  $D$  и  $E$  опущены перпендикуляры:  $EM$  на сторону  $OA$ ,  $DN$  на сторону  $OB$ . Доказать, что  $OC$  перпендикулярна  $MN$ .
7. В квадрате  $ABCD$  на стороне  $AB$  взята точка  $K$ , на стороне  $CD$  взята точка  $L$ ,  $M$  - середина  $KL$ . Докажите, что точка пересечения окружностей, описанных вокруг треугольников  $AKM$  и  $MLC$ , отличная от  $M$ , лежит на диагонали  $AC$ .
8. Дано 4 окружности, причем первая пересекается со второй, вторая с третьей, и т.д. Из каждой пары точек пересечения соседних по номеру окружностей выберем одну. Докажите, что если эти четыре точки лежат на одной окружности, то и другие четыре лежат на одной окружности.
9. Пусть в четырехугольнике  $ABCD$   $M$  - это середина стороны  $AD$ ,  $\angle BMC = 90^\circ$ ,  $\angle BAD = \angle BCM$ . Докажите, что тогда прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются под прямым углом.
10. (Теорема Микеля) Рассмотрим четырехугольник  $ABCD$ , у которого никакие две стороны не параллельны. Продлим  $AB$  и  $CD$  до пересечения в точке  $E$ , а  $BC$  и  $AD$  до пересечения в точке  $F$ . Докажите, что окружности, описанные вокруг треугольников  $ABF$ ,  $ADE$ ,  $CDF$  и  $BEC$  пересекаются в одной точке.