Сравнения по модулю

Вводные задачи

1. Известно, что $a \equiv b \pmod{n}$ и $c \equiv d \pmod{n}$. Докажите, что $ac \equiv bd \pmod{n}$.

2. Найдите остатки от деления 15^{999} и 17^{1000} на 8.

3. Известно, что $a^2 + b^2 = c^2$. Докажите, что abc делится на 5.

4. Определим сравнение по модулю нецелого числа. Будем говорить, что $\alpha \equiv \beta \pmod{\gamma}$, если $\alpha - \beta = k\gamma$, где k целое. Например, $\sqrt{2}+1 \equiv 1+3\sqrt{2} \pmod{\sqrt{2}}$.

   Пусть $\alpha_1 \equiv \beta_1 \pmod{\gamma}$ и $\alpha_2 \equiv \beta_2 \pmod{\gamma}$.

   (a) Верно ли, что $\alpha_1 + \alpha_2 \equiv \beta_1 + \beta_2 \pmod{\gamma}$?

   (b) Верно ли, что $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \equiv \beta_1 \cdot \beta_2 \pmod{\gamma}$?

5. Известно, что $a \equiv b \pmod{n}$ и $c \equiv d \pmod{n}$. Числа a, b, c и d — натуральные. Верно ли, что $a^c \equiv b^d \pmod{n}$?

6. Пусть p простое число, a не делится на p.

   (a) Докажите, что никакие два из чисел $a, 2a, 3a, \ldots, (p-1)a$ не сравнимы по модулю p;

   (b) Докажите, что существует b такое, что $ab \equiv 1 \pmod{p}$.

Задачи-задачи

7. Можно ли среди чисел $\frac{100}{1}$, $\frac{99}{2}$, $\ldots$, $\frac{1}{100}$ выбрать пять, произведение которых равнялось бы единице?

8. Найдите все пары простых чисел (p, q) такие, что $p^5 - 2q^2 = (4p - q)^2$.

9. Найдите все целые x, y, z и t такие, что $x^5 + y^5 + z^5 + t^5 = 1336$.

10. Найдите все тройки натуральных чисел (a, m, n) такие, что a^m+1 делит $(a+1)^n$.