

## Разной по делимости

1. На доске написано число 120. За одну операцию число на доске можно либо умножить на простое число, либо разделить на квадрат натурального числа (если делится нацело). За какое наименьшее количество операций можно получить на доске число 1?
2. Сколько существует трехзначных чисел  $\overline{xyz}$ , таких, что  $\overline{xyz} - \overline{xy} - z$  — точный куб?
3. Какое наибольшее количество идущих подряд натуральных чисел могут иметь сумму цифр, не делящуюся на 4?
4. Решите в натуральных числах уравнение  $(x + y)^3 = (x - y - 6)^2$ .
5. Найдите все простые числа, которые нельзя представить в виде суммы двух составных чисел.
6. Решите в простых числах уравнение  $(p + 3)(q + 3) = 2p^2q$ .
7. О натуральных числах  $a, p, q$  известно, что  $ap + 1$  делится на  $q$ , а  $aq + 1$  делится на  $p$ . Докажите, что  $a > \frac{pq}{2(p+q)}$ .
8. В последовательности натуральных чисел  $a_1, a_2, \dots$  член  $a_{k+m}$  делится на наибольший общий делитель  $a_k$  и  $a_m$  для любых натуральных  $k$  и  $m$ . Докажите, что  $a_{nm}$  делится на  $a_n$ .
9. Натуральные числа  $y$  и  $z$  удовлетворяют соотношению  $y^3 + 4y = z^2$ . Докажите, что  $y$  есть удвоенный квадрат.
10. Есть 4 камня, каждый весит целое число граммов. Есть чашечные весы со стрелкой, показывающей, на какой из двух чаш масса больше и на сколько граммов. Можно ли узнать про все камни, сколько какой весит, за 4 взвешивания, если в одном из этих взвешиваний весы могут ошибиться на 1 грамм?