

Метод Штурма

Авраам Линкольн дал людям свободу,
а полковник Кольт уравнил их шансы

1. Пусть произведение положительных чисел a и b фиксировано. Как при «сближении» a и b ведёт себя их сумма?

2. Пусть сумма положительных чисел a и b фиксирована. Как при «сближении» a и b ведёт себя величина:

(a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$;

(d) $a^3 + b^3$;

(b) $a^2 + b^2$;

(e) $a^n + b^n$;

(c) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$;

(f) $\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n}$;

3. Докажите неравенство $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ для $n > 1$.

4. Положительные числа x_1, \dots, x_n таковы, что $x_1 \dots x_n = 1$. Докажите, что

(a) $x_1 + \dots + x_n \geq n$;

(b) $(1 + x_1) \dots (1 + x_n) \geq 2^n$;

(c) $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq n$

5. Докажите, что для положительных чисел a_1, \dots, a_n выполнено:

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$$

6. Числа x_1, \dots, x_n положительны и $x_1 + \dots + x_n = 1$. Докажите, что $\frac{(1-x_1)\dots(1-x_n)}{x_1 \dots x_n} \geq (n-1)^n$.