

## Вокруг окружности девяти точек

1. Докажите, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, в два раза короче гипотенузы.
2. (*Важная лемма*) Пусть в треугольнике  $ABC$   $H$  - точка пересечения высот,  $O$  - центр описанной окружности,  $M$  - середина стороны  $BC$ . Докажите, что  $AH = 2OM$ .
3. Пусть в треугольнике  $ABC$   $H$  - точка пересечения высот,  $A_1$  - основание высоты из вершины  $A$ ,  $A_0$  - это середина стороны  $BC$ ,  $A_2$  и  $C_2$  - середины отрезков  $AH$  и  $CH$  соответственно. Докажите, что точки  $A_0, A_2, C_2$  и  $A_1$  лежат на одной окружности.
4. (а) В обозначениях предыдущей задачи Пусть  $B_1$  - основание высоты из вершины  $B$ . Докажите, что тогда точки  $A_1, A_2, A_0$  и  $B_1$  лежат на одной окружности.  
(б) (*Окружность девяти точек*) Докажите, что в любом треугольнике середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих вершины с точкой пересечения высот, лежат на одной окружности.
5. Докажите, что центр этой окружности лежит на прямой  $OH$ .
6.  $AA_1$  и  $CC_1$  — высоты остроугольного треугольника  $ABC$ , в котором  $\angle ABC = 45^\circ$ . Точки  $O$  и  $H$  — соответственно центр описанной окружности и ортоцентр треугольника  $ABC$ . Докажите, что прямая  $A_1C_1$  проходит через середину отрезка  $OH$ .
7. В треугольнике  $ABC$  проведены высота  $BH$ , медиана  $BB_1$  и средняя линия  $A_1C_1$  ( $A_1$  лежит на стороне  $BC$ ,  $C_1$  — на стороне  $AB$ ). Прямые  $A_1C_1$  и  $BB_1$  пересекаются в точке  $M$ , а прямые  $C_1B_1$  и  $A_1H$  — в точке  $N$ . Докажите, что прямые  $MN$  и  $BH$  параллельны.
8. Дан треугольник  $ABC$ ,  $O$  — центр его описанной окружности,  $O_1, O_2$  и  $O_3$  — точки, симметричные точке  $O$  относительно прямых  $AB, BC$  и  $AC$ . Докажите, что середины сторон треугольника  $O_1O_2O_3$  лежат на окружности девяти точек треугольника  $ABC$ .
9. (*Прямая Эйлера*) Докажите, что в произвольном треугольнике  $ABC$  точки пересечения высот, медиан и центр описанной окружности лежат на одной прямой.
10. Вписанная окружность касается сторон треугольника  $ABC$  в точках  $A_1, B_1$  и  $C_1$ . Докажите, что прямая Эйлера треугольника  $A_1B_1C_1$  проходит через центр описанной окружности треугольника  $ABC$ .