

Неравенства

1. (*важнейшее неравенство*) Для произвольных вещественных чисел x и y дока-жите неравенство $x^2 + y^2 \geq 2xy$.
2. Докажите, что при любых x, y, z выполнено неравенство: $x^4 + y^4 + z^2 + 1 \geq 2x(xy^2 - x + z + 1)$.
3. Докажите, что при положительном x выполнено неравенство $x + \frac{1}{x} \geq 2$;
4. Для положительных x, y, z докажите $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$.
5. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство:

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$$

6. Для положительных a и b найдите наименьшее значение величины $ax + \frac{b}{x}$ при положительном значении x .
7. Известно, что $1 > x > y > 0$. Докажите, что $\frac{x-y}{1-xy} < 1$.
8. Докажите, что для любых положительных a, b, c выполнено неравенство:

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2$$

9. Известно, что $x, y \in [0, 1]$. Докажите, что $\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \leq 1$.
10. Докажите для положительных значений переменных $(a+1)(b+1)(a+c)(b+c) \geq 16abc$.
11. (а) Для положительных x, y, z докажите $(x+y)(y+z)(x+z) \geq 8xyz$.
(б) Пусть a, b, c — стороны треугольника. Докажите неравенство $abc \geq (a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)$

12. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2a^2 + 5c^2 = 6ab \\ 9b^2 + 6d^2 = 10cd \end{cases}$$