Серия 28. Параллельность

1. а) Докажите, что выпуклый четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его диагонали точкой пересечения делятся пополам.

б) Докажите, что все медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении $2:1$, считая от вершины.

2. Докажите, что середины сторон произвольного четырехугольника — вершины параллелограмма.

3. Через середину M отрезка с концами на двух параллельных прямых проведена прямая, пересекающая эти прямые в точках A и B. Докажите, что M также середина AB.

4. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию. Верно ли обратное?

5. На двух сторонах треугольника вне его построены квадраты. Докажите, что отрезок, соединяющий концы сторон квадратов, выходящих из одной вершины треугольника, в 2 раза больше медианы треугольника, выходящей из той же вершины.

6. Высота AH треугольника ABC равна его медиане BM. На продолжении стороны AB за точку B отложена точка D так, что $BD = AB$. Найдите угол BCD.

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD, равна 1. Прямые BC и AD перпендикулярны. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей AC и BD.

8. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки E и F соответственно так, что $AE = 2BF$. На луче EF отмечена точка G так, что $GF = EF$. Докажите, что угол ACG — прямой.

9. В треугольнике ABC на сторонах AB, AC и BC выбраны точки D, E и F соответственно так, что $BF = 2CF$, $CE = 2AE$ и угол DEF — прямой. Докажите, что DE — биссектриса угла ADF.

10. В треугольнике ABC ($AB > BC$) проведены медиана BM и биссектриса BL. Прямая, проходящая через точку M параллельно AB, пересекает BL в точке D, а прямая, проходящая через L параллельно BC, пересекает BM в точке E. Докажите, что прямые ED и BL перпендикулярны.

Непрерывная олимпиада 28

1. Найти такое трёхзначное число, удвоив которое, мы получим число, выражающее количество цифр, необходимое для написания всех последовательных целых чисел от единицы до этого искомого трёхзначного числа (включительно).

2. Назовем натуральное число n полезным, если любое натуральное число, меньшее n, можно представить в виде суммы нескольких различных делителей n. Докажите, что произведение двух полезных чисел — полезное число.

3. На столе лежат 17 кучек по 17 камней в каждой. Вася и Петя по очереди делают ходы. За один ход можно либо взять камень из какой-либо кучи с наименьшим числом камней, либо уравнять по числу камней какую-либо кучу с не наименьшим числом камней с наименьшей. Выигрывает тот, кто возьмет последний камень. Начинает Вася. Кто выиграет при правильной игре обоих соперников?

4. Все стороны выпуклого пятиугольника равны, а все углы различны. Докажите, что максимальный и минимальный углы прилегают к одной стороне пятиугольника.

5. 10 команд играют турнир. В некоторый момент оказалось, что любые две команды сыграли между собой не более чем по одному разу, только «Металлург» и «Локомотив» сыграли дважды. При этом каждая команда сыграла хотя бы один матч. Могло ли так случиться, что в этот момент все команды сыграли различное число игр?