

Серия 22. Прямоугольные треугольники

Признаки равенства треугольников:

1° Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то треугольники равны.

2° Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то треугольники равны.

3° Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то треугольники равны.

Сумма внутренних углов треугольника 180° .

Упражнения

0.1. Докажите признаки равенства прямоугольных треугольников: по катету и гипотенузе; по гипотенузе и острому углу; по катету и противолежащему углу.

0.2. Докажите, что точка пересечения биссектрис двух внешних углов треугольника лежит на биссектрисе третьего внутреннего угла.

1. Пусть M — середина стороны AB треугольника ABC . Докажите, что $CM = AB/2$ тогда и только тогда, когда $\angle ACB = 90^\circ$.

2. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 , BB_1 , CC_1 и высоты AA_2 , BB_2 , CC_2 . Докажите, что длина ломаной $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$ равна периметру треугольника ABC .

3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом при вершине C высота CH и биссектриса AK пересекаются в точке M . Докажите, что треугольник CMK — равнобедренный.

4. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CK из вершины прямого угла C , а в треугольнике ACK — биссектриса CE . Докажите, что $CB = BE$.

5. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса CD . Прямая, проходящая через точку D перпендикулярно DC , пересекает AC в точке E . Докажите, что $EC = 2AD$.

6. Докажите, что, если в треугольнике один угол равен 120° , то треугольник, образованный основаниями его биссектрис, прямоугольный.

7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ угол B — прямой, а диагональ AC является биссектрисой угла A и равна стороне AD . В треугольнике ADC провели высоту DH . Докажите, что прямая BH делит отрезок CD пополам.

8. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. Точка D внутри треугольника такова, что угол ADC вдвое больше угла ABC . Докажите, что удвоенное расстояние от точки B до прямой, делящей пополам углы, смежные с углом ADC , равно $AD + DC$.

Непрерывная олимпиада 22

1. Два последовательных трехзначных числа записали одно за другим. Докажите, что полученное число не может делиться на 7.
2. Докажите, что в любом связном графе можно удалить вершину вместе со всеми выходящими из нее рёбрами так, чтобы он остался связным.
3. На плоскости дан прямоугольник, диагональ которого равна 2, и точка A . Докажите, что у прямоугольника можно выбрать три вершины таким образом, чтобы сумма расстояний от A до выбранных вершин была не меньше 3.
4. На столе лежат n монет. Вася за первый ход может перевернуть одну монету, за второй — две, за третий — три, и т. д., за n -й — n . При каких n Вася сможет для любого начального расположения монет сделать так, чтобы в конце все монеты лежали одинаковым образом (т. е. все «решкой» вверх или все «орлом» вверх).
5. На плоскости проведено n прямых общего положения (т. е. никакие три не пересекаются в одной точке, никакие две не параллельны). На сколько частей они делят плоскость?