Серия 8. Геометрические неравенства.

Для всякого треугольника ABC выполнены справедливы следующие два утверждения.

1) *Неравенство треугольника.* Длина каждой стороны треугольника меньше суммы длин двух других сторон. А именно, справедливы следующие три неравенства:

$AB < BC + AC$; $BC < AC + AB$; $AC < AB + BC$.

2) Напротив большего угла в треугольнике лежит большая сторона. Например, если угол $\angle A > \angle B$, то $BC > AC$.

1. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка D. Докажите, что отрезок AD короче хотя бы одного из отрезков AB, AC.

2. Дан треугольник ABC.

a) На стороне AB отмечена точка D. Докажите, что $BD + DC < BA + AC$.

b) Внутри треугольника отмечена точка D. Докажите, что $BD + DC < BA + AC$.

3. Докажите, что сумма длин диагоналей выпуклого четырёхугольника меньше периметра, но больше половины периметра.

4. В треугольнике ABC проведена медиана BM. Докажите, что $2BM < BC + BA$.

5. Дан равнобедренный треугольник $ABC(AB = BC)$. На стороне AC выбрана точка M , а на продолжении этой же стороны за точку C выбрана точка N такая, что $AM = CN$. Докажите, что $BM + BN > BA + BC$.

6. Отрезок XY лежит внутри треугольника ABC. Докажите, что он короче самой длинной стороны треугольника.

7. На плоскости проведена прямая l и отмечены точки A и B, лежащие по одну сторону от этой прямой. Найдите на прямой l такую точку X, чтобы длина ломаной AXB была минимальной.

8. На стороне BC остроугольного треугольника ABC отмечена точка F . Как на сторонах AB, AC отметить E, D соответственно таким образом, чтобы периметр треугольника EDF был как можно меньше?

9. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Могут ли все углы ACD, BDE, CEA, DAB, EBC быть тупыми?

Непрерывная олимпиада — 8.

1. На доске написано число 12345. За один шаг разрешается выбрать две соседние цифры, из которых ни одна не равна нулю, уменьшить каждую из них на 1 и поменять местами. Какое наименьшее число можно получить, делая такие шаги?

2. Докажите, что натуральные числа от 1 до 101 включительно нельзя выписать подряд в некотором порядке так, чтобы полученное число было точным кубом.

3. Существует ли четырёхугольник, не имеющий ни центра симметрии, ни оси симметрии, который можно разрезать на два равных четырехугольника?

4. Какое наибольшее число ладей можно расставить на шахматной доске 8×8 так, чтобы каждая ладья находилась под боем не более трех других.

5. В стране 20 городов, причём между любыми двумя городами проложена дорога. Министерство путей сообщения может закрыть на ремонт любую дорогу из четырёх, образующих циклический маршрут. Может ли после нескольких таких операций остаться только 19 дорог?